货运公司的运输问题

作者：汤志高 hihihi@qq.com

【摘要】

本文深入研究了具有供求平衡、有序卸货特点的运输问题，建立最优化模型求解最小运费，采用启发式算法安排每辆车的运载方案。

在问题一的假设下，可以得出每次出车行程均相同的规律，显然存在贪婪因子（每次行车费用=运载费用+空载费用）。采用贪婪算法，在卸货顺序约束下对每次出车求局部最小费用且尽可能满载，最后得出全局解。通过启发式算法配车得到 6 辆车分别工作 7.2511、7.0835、7.4187、6.1696、5.8344、5.8344(小时)，总费用 4771.2 元，总运次 27 次（具体运载方案见 5.1.3）。

在问题二的假设下，由于题中路程唯一，车速不变，可以得出如下定理：

一、车辆载重行程是各公司到港口最短路，且载重费用固定不变(5.2.1 证明)；

二、车辆当且仅当运完最后一件货才调头（5.2.1 证明）；

推论：运载里程与空载里程相同，且每次出车均不绕圈工作。

以所有定理为基础，加入卸货顺序约束，车容量约束，公司需求约束，以每次运输量 P_{ijk} 为决策变量，最小总费用为目标，建立混合动态规划模型，使用 *LINGO* 软件编程求解最小运费及运次方案，通过启发式算法配车得到 4 辆车分别工作 6.917、7.3838、5.7839、6.5338(小时)，总费用 4485.6 元，总运次 29 次（具体运载方案见 5.2.5）。

问题三讨论存在多种容量货车时的运载方案，易证定理一、二及推论成立，在问题二模型基础上，引入 0-1 变量控制每次出车类型、车容量、空载费用，同样以每次运输量 P_{ijk} 为决策变量，最小总费用为目标，建立混合动态规划模型，对求解结果（最小运费、运次方案，见 5.3.2）按启发式算法配车，需要一辆 6 吨位车，工作 7.4171（小时），运送 5 次；两辆 8 吨位车，工作时间分别为 7.3005、7.135（小时），共运送 16 次（具体运载方案见 5.3.4）。

通过问题 3 结果分析，存在定理三：当空载运输路程大于 $\frac{100}{3}$ 公里的条件下才有可能存在 4 吨位车的使用。本题的空载运输路程都小于 $\frac{100}{3}$ 公里，说明并不需要使用 4 吨位的车，而且从全局考虑为了个别出车添加派车非常不符合实际情况，同时也不具有经济优势。

1 问题重述

某地区有 8 个公司（如图一编号①至⑧），某天某货运公司要派车将各公司所需的三种原材料 A,B,C 从某港口（编号⑨）分别运往各个公司。路线是唯一的双向道路（如图一）。货运公司现有一种载重 6 吨的运输车，派车有固定成本 20 元/辆，从港口出车有固定成本为 10 元/车次（车辆每出动一次为一车次）。每辆车平均需要用 15 分钟的时间装车，到每个公司卸车时间平均为 10 分钟，运输车平均速度为 60 公里 / 小时（不考虑塞车现象），每日工作不超过 8 小时。运输车载重运费 1.8 元/吨公里，运输车空载费用 0.4 元/公里。一个单位的原材料 A,B,C 分别毛重 4 吨、3 吨、1 吨，原材料不能拆分，为了安全，大小件同车时必须小件在上，大件在下。卸货时必须先卸小件，而且不允许卸下来的材料再装上车，另外必须要满足各公司当天的需求量（见图二）。

问题：1. 货运公司派出运输车 6 辆，每辆车从港口出发（不定方向）后运输途中不允许调头，应如何调度（每辆车的运载方案，运输成本）使得运费最小。

2. 每辆车在运输途中可随时调头，若要使得成本最小，货运公司怎么安排车辆数？应如何调度？

3. （1）如果有载重量为 4 吨、6 吨、8 吨三种运输车，载重运费都是 1.8 元/吨公里，空载费用分别为 0.2，0.4，0.7 元/公里，其他费用一样，如何安排车辆数和调度方案？（2）当各个公司间都有或者部分有道路直接相通时，分析运输调度的难度所在，给出你的解决问题的想法（可结合实际情况深入分析）。

2 模型假设

(1) 港口的容量足够大，多辆运输车同时到达港口时不会发生阻塞现象；
(2) 多辆运输车可以在港口同时装车，不必等待；
(3) 双向道路上没有塞车现象；
(4) 8 个公司之间没有优先级别，货运公司只要满足他们的需求量就可以；
(5) 运输车完成当日的运输任务之后，回到港口；

3 符号说明和名词约定

P_{ijk}	第 i 次送货到第 j 个公司的第 k 种货物的单位数	单位
W_k	1 单位第 k 种货物的重量	吨
$D1_j$	从港口到第 j 个公司的顺时针距离	公里
$D2_j$	从港口到第 j 个公司的逆时针距离	公里
B_i	第 i 车次的空载费用	元
G_{jk}	第 j 个公司第 k 种货物的需求量	单位

顺时针距离：运输车从港口出发，按顺时针方向沿着环形路线达到某公司经过的距离；
逆时针距离：运输车从港口出发，按逆时针方向沿着环形路线达到某公司经过的距离；
最短距离：　港口和公司的最短路的路程。

4 问题分析

运输过程的最大特点是三种原料重量不同，分为大小件，当大小件同车，卸货时必须先卸小件，而且不允许卸下来的材料再装上车，要区别对待运输途中是否可以调头的费用。在问题一中，运输途中不能调头，整个送货路线是一个环形闭合回路，如果沿着某一方向同时给多家公司送货时，运输车必须为距离港口近的公司卸下小件，为距离港口远的公司运送大件；而在问题二中，运输途中可以调头，可以首先为远处公司运送小件，在返回途中为距离较近的公司卸下大件。

运费最小是货运公司调度运输车的目标，运费包括派车固定成本、从港口出车成本、载重费用和空载费用。

建立模型时，要注意以下几方面的问题：

目标层：

如果将调度车数、车次以及每车次的载重和卸货点都设为变量，模型中变量过多，不易求解。由于各辆运输车之间相互独立，可以将目标转化为两个阶段的求解过程，第一阶段是规划车次阶段，求解车次总数和每车次的装卸方案；第二阶段是车辆调度阶段，安排尽量少的车辆数，每车次尽量满载，使总的运费最小。

约束层：

(1) 运输车可以从顺时针或者逆时针方向送货，要考虑不同方向时的载重费用；
(2) 大小件的卸车顺序要求不同原料搭配运输时，沿途必须有序卸货；
(3) 每车次的送货量不能超过运输车的最大载重量；
(4) 满足各公司当日需求。

5 建立模型

5.1 问题一

5.1.1 车次规划模型的分析

车次规划阶段只涉及到载重费用、空载费用和港口出车费用。运输途中不能掉头，所以每车次都是沿闭合回路绕圈行驶。

第一、约束分析

(1) **大小件卸货顺序的限制：**

运输途中不能掉头，所以为某些公司送货时，运输车从港口出发，按顺时针方向沿闭合回路绕行，为其它公司送货时，按逆时针方向沿闭合回路绕行。公司和港口之间存在顺时针距离和逆时针距离，如下：

公司编号	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
顺时针距离	8	15	24	29	37	45	49	55
逆时针距离	52	45	36	31	23	15	11	5

根据 3 种原料的重量和运输车的最大运载量可以看出，A 和 C 可以搭配运输，B 和 C 可以搭配运输，而 A 与 B 不能同车运输。不论是以顺时针方向送货还是以逆时针方向送货，当大小件搭配运输时，必须首先卸下小件，在后续公司卸下大件。我们把这种特点总结如下：

特点I

若在第 j 个公司卸下的是大件 A，说明本车次的货物已经卸完，不能够再为后续公司运送小件 C（A 与 B 不能同车运输，更不可能有 B）；

特点II

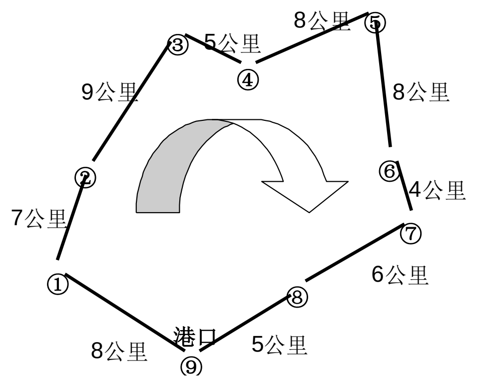
若在第 j 个公司卸下的是 B，说明本车次的货物已经卸完，不能够再为后续公司运送小件 C。

基于以上特点，提取遍历思想：

将 8 个公司看作闭合回路上的 8 个点，对送货顺序的制定，根据卸货时必须先卸小件的原则，第 j 个点之前的情况不予研究，只要符合“先小件后大件”的原则就可以。而每次卸货对后续公司的影响就必须满足特点Ⅰ和特点Ⅱ。以 4 号公司为例，在此处卸下 1 单位的原料 A，若本车次是以顺时针方向送货的，可以在 1～3 公司卸下原料 C，但是不能为 4 号公司的后续公司提供任何原料。

这样通过对每一点的遍历控制，达到本车次在整个回路中不发生卸货大小顺序紊乱的目的。假设 P_{ijk} 表示第 i 车次送货到第 j 个公司的第 k 种货物的单位数，k=1、2、3 依次代表原料 A、B、C，那么遍历思想的特点Ⅰ和特点Ⅱ，以数学语言描述如下：

◆ 如果顺时针方向送货，如右图所示。从 1 号公司依次往后遍历，直到第 7 个公司。而第 8 个公司之后是港口，就没有必要判断 8 号公司的卸货情况对后续公司的影响。对第 j（j＝1…7）个公司来说，它的后续公司是 j＋1～8 号公司，因此



顺时针行驶示意图

Ⅰ 当第 j 个公司卸下原料 A 时，约束方程为

$$P_{ij1}\times\sum_{J=j+1}^{8}P_{iJ3}=0$$

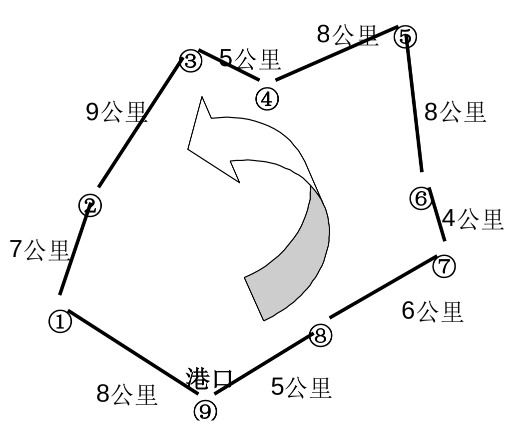
Ⅱ 当第 j 个公司卸下原料 B 时，约束方程是

$$P_{ij2}\times\sum_{J=j+1}^{8}P_{iJ3}=0$$

原料 A 和 B 不能同车，所以将Ⅰ、Ⅱ两种情况归一：

$$\left(P_{ij1}+P_{ij2}\right)\times\sum_{J=j+1}^{8}P_{iJ3}=0$$

◆ 如果逆时针方向送货，如右图所示。从 8 号公司开始遍历，直到 1 号公司。对第对第 j（j＝8…2）个公司来说，它的后续公司是 1～j－1 号公司，因此



逆时针行驶示意图

Ⅰ 当第 j 个公司卸下原料 A 时，约束方程为

$$P_{ij1}\times\sum_{J=1}^{j-1}P_{iJ3}=0$$

Ⅱ 当第 j 个公司卸下原料 B 时，约束方程是

$$P_{ij2}\times\sum_{J=1}^{j-1}P_{iJ3}=0$$

原料 A 和 B 不能同车，所以将Ⅰ、Ⅱ两种情况归一：

$$\left(P_{ij1}+P_{ij2}\right)\times\sum_{J=1}^{j-1}P_{iJ3}=0$$

由于运输途中不能掉头，每车次只能以一种方向绕行闭合回路，上述分析的顺时针和逆时针的遍历不可能同时发生。引入 0－1 变量 $X1_i$、$X2_i$

$X1_i$ ＝1 表示顺时针方向送货，$X2_i$ ＝1 表示逆时针方向送货

$$\begin{cases} X1_i\left(P_{ij1}+P_{ij2}\right)\times\sum\limits_{J=j+1}^{8}P_{iJ3}=0 \\ X2_i\left(P_{ij1}+P_{ij2}\right)\times\sum\limits_{J=j-1}^{1}P_{iJ3}=0 \\ X1_i+X2_i=1 \end{cases}$$

这样就很好地实现了每车次单向运输，并且有序卸货的目的。

(2)每车次的载重不超过运输车的最大载重量

假设 P_{ijk} 表示第 i 车次送货到第 j 个公司的第 k 种货物的单位数，W_k 表示第 k 种货物 1 单位的重量，那么第 i 车次的载重必须小于运输车的最大载重量 6 吨

$$\sum_{j=1}^{8}\sum_{k=1}^{3}\left(P_{ijk}W_k\right)\leq 6$$

(3)送货量满足公司当日需求

假设运载次数为 N, 运输完毕后，每个公司各种货物的需求都得到满足，设第 j 各公司需要第 k 种货物的单位数为 G_{jk}，则

$$\sum_{i=1}^{N}P_{ijk}=G_{jk}$$

第二、目标分析

(1)　港口出车费用

港口出车有固定成本为 10 元/车次，设一共出车 N 次就可以完成运输任务，那么出车费用为

$$10N$$

(2)　空载费用

首先引入 0－1 变量，表示本车次各个公司是否收到过货物。

当某公司收到货物时

$$\sum_{k=1}^{3}P_{ijk}\neq 0$$

没有收到任何货物时，

$$\sum_{k=1}^{3} P_{ijk} = 0$$

取 $f_{ij} = 1\%(1+\sum_{k=1}^{3} P_{ijk})$，将二者统一，那么 f_{ij} 是 0—1 变量。当 $f_{ij}=1$ 时，表示第 j 个公司在第 i 车次时没有收到任何货物； $f_{ij}=0$，表示收到过货物。

整个运输过程，运输车必须经过 8 个公司，那么，在本车次没有收到任何货物并且距离港口最远的公司（据运输车的送货方向而定），就是本车次卸货终点，即：

$$\begin{cases} \max\limits_{j=1}^{8}\left(\left(X1_i D1_j + X2_i D2_j\right)\times f_{ij}\right) \\ X1_i + X2_i = 1 \end{cases}$$

其中， $X1_i=1$ 时表示第 i 车次按照顺时针方向送货， $X2_i=1$ 表示第 i 车次按照逆时针方向送货。$D1_j$ 表示第 j 个公司和港口的顺时针距离，$D2_j$ 表示第 j 个公司和港口的逆时针距离。

运输车从卸货终点沿原方向回到港口的距离就是空载距离

$$60-\max_{j=1}^{8}\left(\left(X1_i D1_j + X2_i D2_j\right)\times f_{ij}\right)$$

单位距离的空载费用为 0.4 元，所以第 i 车次的空载费用为

$$B_i = 0.4\left[60-\max_{j=1}^{8}\left(\left(X1_i D1_j + X2_i D2_j\right)\times f_{ij}\right)\right]$$

(3)　载重费用

由于运输途中不能回头，每 1 单位的原料或者以顺时针距离运至公司，或者以逆时针距离运至公司，运输车载重运费 1.8 元/吨公里，因此，第 i 车次的载重运费为

$$1.8\sum_{j=1}^{8}\sum_{k=1}^{3}\left(P_{ijk}W_k\left(X1_i D1_j + X2_i D2_j\right)\right)$$

5.1.2 建立模型

对车次规划阶段，以每次运输量 P_{ijk} 为决策变量，规划车次阶段的最小运费为目标，建立混合动态规划模型

$$MIN\ \ Z = \sum_{i}^{N}\left(10+1.8\sum_{j=1}^{8}\sum_{k=1}^{3}\left(P_{ijk}W_k\left(X1_i D1_j + X2_i D2_j\right)\right)+B_i\right)$$

$$
S.T\begin{cases}
B_i = 0.4\left[60-\max\limits_{j=1}^{8}\left(\left(X1_i D1_j + X2_i D2_j\right)\times f_{ij}\right)\right] & \cdots\cdots\cdots(1)\\
f_{ij} = 1\%(1+\sum\limits_{k=1}^{3} P_{ijk}) & \cdots\cdots\cdots(2)\\
X1_i \in \{0,1\} \quad X2_i \in \{0,1\} & \cdots\cdots\cdots(3)\\
P_{ijk}\text{是整数} & \cdots\cdots\cdots(4)\\
X1_i\left(P_{ij1}+P_{ij2}\right)\times\sum\limits_{J=j+1}^{8} P_{iJ3} = 0 \qquad j=1..7 & \cdots\cdots\cdots(5)\\
X2_i\left(P_{ij1}+P_{ij2}\right)\times\sum\limits_{J=1}^{j-1} P_{iJ3} = 0 \qquad j=2..8 & \cdots\cdots\cdots(6)\\
X1_i + X2_i \le 1 & \cdots\cdots\cdots(7)\\
\sum\limits_{j=1}^{8}\sum\limits_{k=1}^{3}\left(P_{ijk}W_k\right)\le 6 & \cdots\cdots\cdots(8)\\
\sum\limits_{i=1}^{N} P_{ijk} = G_{jk} \qquad j=1..8; k=1..3 & \cdots\cdots\cdots(9)
\end{cases}
$$

【模型解释】

目标　　运费[1]（包括港口出车费用、载重费用和空载费用）最小，需要运输 N 车次。

约束（1）～（9）

(1)　第 i 车次的空载费用；

(2)　f_{ij}=1 时，表示第 j 个公司在第 i 车次时没有收到任何货物；　f_{ij}=0，表示收到过货物。

(3)　$X1_i$ 和 $X2_i$ 都是 0－1 变量。$X1_i$ ＝1 表示第 i 车次按照顺时针方向送货，$X2_i$ ＝1 表示第 i 车次按照逆时针方向送货；

(4)　原料必须整单位运输；

（5）～（7）属于大小件卸货顺序的约束

(5)　运输车在顺时针方向送货时，原料 A 和 B 不同车，当在第 j 个公司卸下 A 或者 B 时，本车次不能再为后续公司运送原料 C；

(6)　运输车在逆时针方向送货时，原料 A 和 B 不同车，当在第 j 个公司卸下 A 或者 B 时，本车次不能再为后续公司运送原料 C；

(7)　以 $X1_i$　$X2_i$ 约束第 i 车次只能够以一种方向送货。

(8)　第 i 车次载重不超过运输车的最大载重量 6 吨；

(9)　送货量必须满足各公司当天的需求量。

5.1.3 派车方案的确立

由于问题一的特殊性——总路程一定，具有全局贪心因子（载重费用加上空载费用），采用贪心算法，在卸货有序的约束下对每次出车求局部最小费用且尽可能满载，最后得出全局解。具体算法如下：

整个环形闭合回路总长60公里，为了使运费最小，则每次运输应尽量满载，以减少运输次数，每次运输应在30公里以内尽量全部将货卸完（注意大小件约束），以减少运

费。其次要尽量减少卸车次数，减少运输时间。

特例说明：当满载与运输次数冲突时，要依据实际情况进行分析。例如，最终4号公司与5号公司分别需要1单位的原料B，虽然4号公司的顺时针距离小于逆时针距离，以顺时针方向运输时，费用较低；而5号公司的逆时针距离小于顺时针距离，以逆时针方向运输时，费用较低。从表面上看，这需要2车次才能完成运输任务，但实际上比较经济的方法是按逆时针方向一次为4和5号公司运输完毕。此时的运输费用将比分两次运输节省14.8元，时间节省1.25小时。若顺时针运输一次完毕，运输费用将比分两次运输多花52.4元，时间节省1.25小时，是最差的方案。

由于此处给定6辆车，安排相对比较合理时，运输时间就成为次要因子，只需比较总费用即可。采取运费较省的方案。当两种运费相同时，再考虑时间因子。

派车方案：

表1

车辆	次数	公司	货物		时间（小时）	运费（元）	各车工作时间（小时）
1	1	1	A 和 2C		1.4167	**583.4**	**7.2511**
	2	1	A 和 2C		1.4167		
	3	1	A 和 C		1.4167		
	4	1	A		1.4167		
	5	1,2	B	B	1.5843		
2	1	2	A 和 2C		1.4167	**1128.4**	**7.0835**
	2	2	2B		1.4167		
	3	2	2B		1.4167		
	4	3	A 和 2C		1.4167		
	5	3	A 和 2C		1.4167		
3	1	4	A 和 2C		1.4167	**1030.4**	**7.4187**
	2	4	A		1.4167		
	3	4	A		1.4167		
	4	8,7	A 和 C	C	1.5843		
	5	8,6	A	2C	1.5843		
4	1	8,6	A	C	1.5843	**484.2**	**6.1696**
	2	8,5	A	2C	1.5843		
	3	8,5	A	2C	1.5843		
	4	8	2B		1.4167		
5	1	8，5	B	B	1.5843	**641.2**	**5.8344**
	2	7	A 和 2C		1.4167		
	3	7	A 和 2C		1.4167		
	4	7	2B		1.4167		
6	1	6	2B		1.4167	**903.6**	**5.8344**
	2	6	2B		1.4167		
	3	5	A		1.4167		
	4	5,4	B	B	1.5843		
总运费	**4771.2 元**						

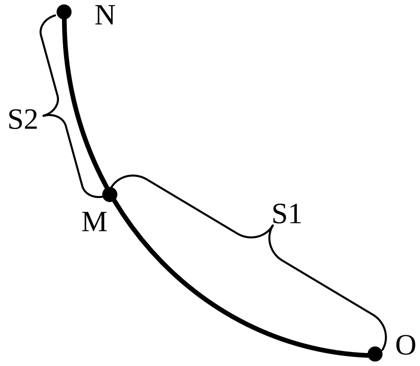
表1将派车方案清楚的展现了出来，需要6辆车，每车次在公司哪个卸货、卸货的种类和数量以及需要的时间和运费一目了然。从表1的最后一列可以看出，各车的工作时间是比较长的，劳动强度较大。

5.2 问题二

5.2.1 两个定理的证明

定理一、车辆当且仅当运完最后一件货物时才调头

途中允许调头，运输车可以先为较远的公司送去小件原料，然后调头，为比较近的公司送去大件。从表面上看，这样运输能够节省车次，降低出车费用。但我们通过分析，在本题中，载重调头运输并不能降低费用。证明过程如下：



在上图中，记O点为港口，N、M为两公司。M到港口的距离是S1，NM两个公司之间的距离为S2。假设将两种货物a和b（重量分别为x吨、y吨），分别运往N和M两公司，现有两种运输方案：

1.若先运货a、b到N，将a卸到N，调头返回，将货物b运往M，那么a必为C原料（x＝1），b为A或B（$3 \le y \le 4$），记运费用为f_1

2.若先单独运送货物a到N，返回港口后，再次出车，将货物b运往M，即出车两次，记运费用为f_2。

➢ **两种方案需要的车辆相同时，**

为比较两种运输方式费用的大小，两种运输的种类质量均相同，记：$f = f_1 - f_2$

若$f > 0$恒成立，则载重调头送货不节省费用，通过数据处理提取函数：

$$f = 3.6 \cdot y \cdot s_2 - 10 - 0.4(s_1 + s_2)$$

因为 $4 \ge y \ge 3$

并且N、M两公司在本题中的最小距离$s_2 = 4$

代入到 f 中，化简得到

$$f_{\min} = 31.6 - 0.4 s_1$$

令 $f_{\min} = 31.6 - 0.4 s_1$

得到 $s_1 > 75$

而港口到所有公司最短路的最大值为29公里，所以

$f_{\min} > 0$恒成立。

说明前一种花费较高。

➢ **方案二比方案一需要的车辆多时**

第二种方案是出车两次，运输时间较长，在 8 小时的工作时间内，可能会比调头载重运输时多安排车辆，派车费用增加。我们考虑一种最差情况，因多运一次而增派一辆车，此时有

$$f_{\min} = 11.6 - 0.4 s_1 < 0$$

得到 $s_1 \geq 29$

因为港口到所有公司的最短路径 $s_1 \leq 29$

所以 $f_{\min} \geq 0$

综上，载重调头运输花费较高。证明了以运费用最小为目标时，车辆当且仅当运完最后一件货物时才调头。

定理一的推论：运载里程与空载里程相同，且每次出车均不绕圈工作。

定理二、车辆载重行程是各公司到港口的最短路，且载重费用固定不变

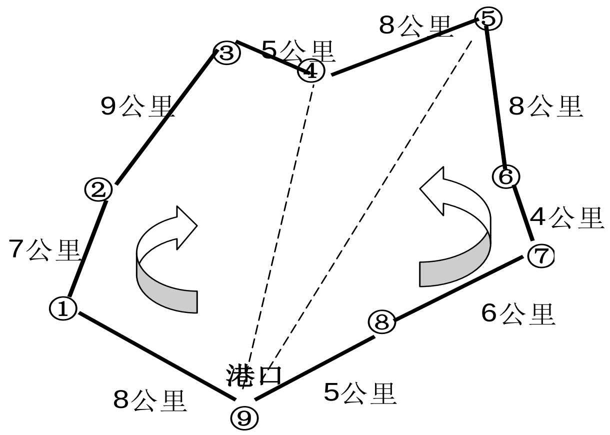
在定理一的基础上，车辆当且仅当运完最后一件货才调头，且每次出车均不绕圈工作，那么每一单位的原料都可以由最短路径运至需货公司。我们变换视角，从宏观的角度看去，对8个公司所需货物的数量分别乘以公司和港口的最短距离和载重单价（1.8元/吨公里）就是将货物运至公司的载重费用，载重费用因子：货物的数量、公司和港口的最短距离、载重单价都是定值，因此，载重费用是固定不变的。

5.2.2 规划车次模型的分析

8 个公司到港口的最短距离如下：

公司	1	2	3	4	5	6	7	8
最短距离（公里）	8	15	24	29	23	15	11	5

上文已经证明了车辆载重行程是各公司到港口的最短路，以 4 号和 5 号公司为界，为 4 号以及它左侧的公司送货时，应该顺时针行驶，为 5 号以及它右侧的公司送货时，应该逆时针行驶，当且仅当运完最后一件货物时才调头。



约束分析：

运输过程大小件可以搭配运输（A 和 C、B 和 C），存在有序卸货问题；每车次的送货量限制以及公司的需求量限制。

(1)　大小件卸货顺序的限制：

和问题一中的遍历思想相同：若在第 j 个公司卸下的是大件 A，说明本车次的货物已经卸完，不能够再为后续公司运送小件 C；若在第 j 个公司卸下的是 B，说明本车次的货物已经卸完，不能够再为后续公司运送小件 C。设 P_{ijk} 表示第 i 车次送货到第 j 个公

司的第 k 种货物的单位数。

所以，为 1 至 4 号公司送货时，约束方程为

$$\left(P_{ij1}+P_{ij2}\right)\times\sum_{J=j+1}^{4}P_{iJ3}=0$$

为 5 至 8 号公司送货时，约束方程为

$$\left(P_{ij1}+P_{ij2}\right)\times\sum_{J=5}^{j-1}P_{iJ3}=0$$

对于同一车次，只能沿一种方向行驶，约束方程为

$$\left(\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{3}P_{ijk}\right)\times\left(\sum_{j=5}^{8}\sum_{k=1}^{3}P_{ijk}\right)=0$$

(2) **每车次的载重不超过运输车的最大载重量**

假设 P_{ijk} 表示第 i 车次送货到第 j 个公司的第 k 种货物的单位数，W_k 表示第 k 种货物 1 单位的重量，那么第 i 车次的载重必须小于运输车的最大载重量 6 吨

$$\sum_{j=1}^{8}\sum_{k=1}^{3}\left(P_{ijk}W_k\right)\le 6$$

(3) **送货量满足公司当日需求**

假设运载次数为 N，运输完毕后，每个公司各种货物的需求都得到满足，设第 j 各公司需要第 k 种货物的单位数为 G_{jk}，则

$$\sum_{i=1}^{N}P_{ijk}=G_{jk}$$

目标分析

(1) 港口出车费用

港口出车有固定成本为 10 元/车次，设一共出车 N 次就可以完成运输任务，那么出车费用为

$$10N$$

(2) 载重费用

在 5.2.1 中已经证明了车辆载重行程是各公司到港口的最短路，且载重费用固定不变。设 D_j 表示第 j 个公司到港口的最短距离，所以总的载重费用为

$$1.8\sum_{j}^{8}\sum_{k}^{3}\left(P_{ijk}W_kD_j\right)$$

(3) 空载费用

取 $f_{ij}=1\%(1+\sum_{k=1}^{3}P_{ijk})$，那么 f_{ij} 是 0－1 变量。当 f_{ij} ＝1 时，表示第 j 个公司在第 i 车次时没有收到任何货物； f_{ij}=0，表示收到过货物。

整个运输过程，运输车必须经过 8 个公司，那么，在本车次没有收到任何货物并且距离港口最远的公司（据运输车的送货方向而定），就是本车次卸货终点，之后运输车调头按原路返回。空载费用可以表示为

$$B_i=0.4\max_{j=1}^{8}\left(D_jf_{ij}\right)$$

规划车次阶段的运费即为港口出车费用、载重费用和空载费用之和。

5.2.3 建立模型

在规划车次阶段，以每次运输量 P_{ijk} 为决策变量，规划车次阶段的最小运费为目标，建立混合动态规划模型

$$MIN\ \ Z=\sum_{i=1}^{N}\left(10+1.8\sum_{j}^{8}\sum_{k}^{3}\left(P_{ijk}W_kD_j\right)+B_i\right)$$

$$S.T\begin{cases} B_i=0.4\max\limits_{j=1}^{8}\left(D_j f_{ij}\right) & & \cdots\cdots\cdots(1)\\ f_{ij}=1\%(1+\sum\limits_{k=1}^{3}P_{ijk}) & & \cdots\cdots\cdots(2)\\ \left(P_{ij1}+P_{ij2}\right)\times\sum\limits_{J=j+1}^{4}P_{iJ3}=0 & j=1..3 & \cdots\cdots\cdots(3)\\ \left(P_{ij1}+P_{ij2}\right)\times\sum\limits_{J=5}^{j-1}P_{iJ3}=0 & j=6..8 & \cdots\cdots\cdots(4)\\ \left(\sum\limits_{j=1}^{4}\sum\limits_{k=1}^{3}P_{ijk}\right)\times\left(\sum\limits_{j=5}^{8}\sum\limits_{k=1}^{3}P_{ijk}\right)=0 & & \cdots\cdots\cdots(5)\\ \sum\limits_{j=1}^{8}\sum\limits_{k=1}^{3}P_{ijk}W_k\le 6; & i=1..6 & \cdots\cdots\cdots(6)\\ \sum\limits_{i=1}^{N}P_{ijk}=G_{jk} & j=1..8;k=1..3 & \cdots\cdots\cdots(7)\\ P_{ijk}\text{是整数} & & \cdots\cdots\cdots(8) \end{cases}$$

【模型解释】

目标		规划车次阶段的运费（包括港口出车费用、载重费用和空载费用）最小，需要运输 N 车次
约束(1)		第 i 车次的空载费用
(2)		$f_{ij}=1$ 时，表示第 j 个公司在第 i 车次时没有收到任何货物； $f_{ij}=0$，表示收到过货物
大小件卸货顺序的约束	(3)	运输车为 1 至 4 号公司送货时，顺时针行驶，原料 A 和 B 不同车，当在第 j（1…3）个公司卸下 A 或者 B 时，本车次不能再为后续公司运送原料 C
	(4)	运输车为 8 至 5 号公司送货时，逆时针行驶，原料 A 和 B 不同车，当在第 j（…8）个公司卸下 A 或者 B 时，本车次不能再为后续公司运送原料 C
	(5)	对于同一车次，运输车只以一种方向行驶
(6)		每一车次的运载量不超过运输车的最大载重量 6 吨
(7)		送货量必须满足各公司当天的需求量
(8)		原料必须整单位运送

5.2.4 规划车次模型求解

由于定理二的成立，可以对模型进行如下变化

优化一：目标优化，将常量（载重运费）预先计算 3949.2 元，代入目标，可提高目标计算速度(*LINGO* 软件在全局寻优时没改变一次变量值需要重复计算目标值)，也可以直接取消。

优化二：模型分步求解，通俗的理解：1~4 号公司单独运用模型求解，5~6 号公司单独运用模型求解。这样做的好处是还可以取消约束（11），取消等式约束大大减少了软件求解复杂度，人为地提高了算法效率。

具体 *LINGO* 程序见（x.xx），在求解时需使用　全局最优设置

变量解释：P(i,j,k)表示第 *i* 次送货到第 *j* 个公司的第 *k* 种货物的单位数

	1～4 号公司 【取消常量（载重运费）】	**5～8 号公司 【取消常量（载重运费）】**
目标值 （空车费）	**99.60000**	**66.80000**
决策变量 （非 0 值）	P(1, 1,1)=1 P(1, 1,3)=1 P(2, 4,1)=1 P(3, 2,2)=1 P(3, 4,2)=1 P(4, 4,1)=1 P(4, 4,3)=2 P(5, 2,2)=2 P(6, 1,1)=1 P(6, 1,3)=1 P(7, 2,1)=1 P(7, 2,3)=1 P(8, 3,1)=1 P(8, 3,3)=1 P(9, 1,2)=1 P(9, 1,3)=1 P(10,2,2)=2 P(11,1,1)=1 P(11,1,3)=1 P(12,1,1)=1 P(12,1,3)=1 P(13,3,1)=1 P(13,3,3)=2 P(14,2,3)=1 P(14,3,3)=1 P(14,4,1)=1	P(1 ,8,2)=2 P(2, 8,1)=1 P(3 ,7,1)=1 P(3 ,7,3)=2 P(4 ,8,1)=1 P(5 ,6,2)=2 P(6 ,8,1)=1 P(7 ,8,2)=1 P(7 ,8,3)=1 P(8 ,8,1)=1 P(9 ,5,2)=1 P(9 ,5,3)=1 P(9 ,6,3)=2 P(10,5,2)=1 P(10,5,3)=1 P(10,6,3)=1 P(10,7,3)=1 P(11,7,2)=2 P(12,5,1)=1 P(12,5,3)=2 P(13,7,1)=1 P(13,7,3)=2 P(14,6,2)=2 P(15,8,1)=1

5.2.5 派车方案的确立

在问题一的基础上，因增加了随时调头，车辆不限的条件，派车时需注意时间因子的变化，因其会影响车辆的调度，运输时仍应尽量满载，对于无法满载的情况，应尽量出现在距港口较近的公司。以减少空载运输费。确定运输车辆时，应首先对每次运输时间进行计算，得出总共工作时间，通过工作上限，确定最少车辆数，求出车辆平均工作

时间，派车时，使每辆车工作时间尽量接近平均工作时间，得出较优调度方案。

1～4 号公司（顺时针运输）						
车辆	次数	公司	货物	时间（小时）	运费（元）	工作时间（小时）
第一辆	1	4	A和2C	1.3834	1353.6	6.917
	2	4	A	1.3834		
	3	4	A	1.3834		
	4	2,4	B B	1.5501		
	5	3	A和2C	1.2167		
第二辆	1	3	A和2C	1.2167	1244.4	7.3838
	2	2	2B	0.9167		
	3	2	2B	0.9167		
	4	1	A和2C	0.6834		
	5	1	B和3C	0.6834		
	6	1	A	0.6834		
	7	1	A	0.6834		
	8	1	A	0.6834		
	9	2	A和2C	0.9167		

8～5 号公司（逆时针运输）						
车辆	次数	公司	货物	时间	运费（元）	工作时间（小时）
第三辆	1	8	2B	0.5834	685.2	5.7839
	2	8	A	0.5834		
	3	7	A 和 2C	0.7834		
	4	8	A	0.5834		
	5	6	2B	0.9167		
	6	8	A	0.5834		
	7	8	B 和 C	0.5834		
	8	8	A	0.5834		
	9	8	A	0.5834		
第四辆	1	5,6	BC 2C	1.3501	1202.4	6.5338
	2	5,6,7	B 和 C C C	1.5168		
	3	7	2B	0.7834		
	4	5	A 和 2C	1.1834		
	5	7	A 和 2C	0.7834		
	6	6	2B	0.9167		

总运费共计 4485.6 元

5.2.6 结果分析

问题一和问题二的唯一区别是运输途中可否调头，前者运输车只能绕圈行驶，后者运输车在卸完全部货物之后，调头空车返回。从派车方案来看，问题二通过对运输规则的改变，总运费明显降低，并且只调度了 4 辆车，各车劳动强度降低，这对与行车安全也是有利的，综上，可随时调头的派车方案更具有实际意义。

5.3 问题三

依然将实现最小运费的目标转化为两个阶段实现：规划车次阶段和调度车辆阶段。现有 3 种运输车，单位载重费用相同，但是单位空载距离费用不同。每一次出车都有三种车可以选择。从问题一和问题二中，可以看出问题二的可以调头的方案运费较小，所

以，本题的运输过程分为 2 种情况：一是为 1 至 4 号公司送货时，应该顺时针行驶，为 5 号至 8 号公司送货时，应该逆时针行驶。每次运货当且仅当运完最后一件货物时才调头。车辆载重行程是各公司到港口的最短路，且载重费用

$$1.8\sum_{j}^{8}\sum_{k}^{3}\left(P_{ijk}W_kD_j\right)$$

还是固定的，但是由于各种车的单位空载距离费用不同，空载费用的计算方法需要稍加改变。而有序卸货的问题仍可以通过遍历思想很好的解决。现将问题三的模型分析如下：

第一、运费的分析

引入变量 0－1 变量Q_{ih}，表示第 i 车次是否使用第 h 种车。因为每一车次最多需要 1 辆车，所以

$$\sum_{h=1}^{3}Q_{ih} \le 1$$

若第 i 次一辆都不使用，就表示总需求已经被满足，运输任务结束。

（1）一共出车 N 次，每一次出车费用为 10 元，所以总出车费用为

$$10\times\sum_{h=1}^{3}Q_{ih}\times N$$

（2）载重费用

设P_{ijk}表示第 i 车次送货到第 j 个公司的第 k 种货物的单位数，W_k表示第 k 种货物 1 单位的重量，D_j表示第 j 个公司到港口的最短距离，运输车将每 1 单位的原料按照最短路径运至需货公司，那么载重费用为

$$1.8\sum_{j}^{8}\sum_{k}^{3}\left(P_{ijk}W_kD_j\right)$$

（3）空载费用

取 $f_{ij}=1\%(1+\sum_{k=1}^{3}P_{ijk})$，那么 f_{ij} 是 0－1 变量。当 f_{ij} ＝1 时，表示第 j 个公司在第 i 车次时没有收到任何货物； f_{ij} =0，表示收到过货物。

整个运输过程，运输车必须经过 8 个公司，那么，在本车次没有收到任何货物并且距离港口最远的公司（据运输车的送货方向而定），就是本车次卸货终点，之后运输车调头按原路返回。设第 h 种运输车的单位距离空载费用为M_h，用 0－1 变量Q_{ih}控制每车次出车数量不超过 1，空载费用可以表示为

$$\begin{cases} B_i=\max\limits_{j=1}^{8}\left(D_j\times f_{ij}\right)\times\sum\limits_{h=1}^{3}\left(Q_{ih}\times M_h\right) \\ \sum\limits_{h=1}^{3}Q_{ih}\le 1 \end{cases}$$

规划车次阶段的运费包括港口出车费用、载重费用和空载费用 3 部分。

第二、约束条件的分析

本题的行车方案和问题二是相同的，虽然此时原料 A 和 B 在使用 8 吨载重量的车时也可以同车，但是“先卸小件后卸大件”的原则不能违背。即若在第 j 个公司卸下的是大件 A，说明本车次的货物已经卸完，不能够再为后续公司运送 B 和 C；若在第 j 个公司卸下的是 B，说明本车次的货物已经卸完，不能够再为后续公司运送小件 C。所以卸

货的有序性和问题二的约束一致，货运公司的送货方案应该满足各个公司的需求量的约束也是一样的，就不再一一列举了。

但是，各种运输车的最大载重量是不一样的，设为Y_h，每车次的运输量应该小于所使用的运输车的最大载重量：

$$\sum_{j=1}^{8}\sum_{k=1}^{3}P_{ijk}W_k \le \sum_{h=1}^{3}\left(Q_{ih}Y_h\right)$$

5.3.1 建立模型

在规划车次阶段，以每次运输量P_{ijk}为决策变量，规划车次阶段的最小运费为目标，建立混合动态规划模型

$$MIN\ \ Z=\sum_{i=1}^{N}\left[10\times\sum_{h=1}^{3}Q_{ih}+1.8\sum_{j}\sum_{k}\left(P_{ijk}W_kD_j\right)+B_i\right]$$

$$S.T\begin{cases}
(01)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & B_i=\max\limits_{j=1}^{8}\left(D_j\times f_{ij}\right)\times\sum\limits_{h=1}^{3}\left(Q_{ih}\times M_h\right) & \\
(02)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & Q_{ih}\in\{0,1\} & \\
(03)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & f_{ij}=1\%(1+\sum\limits_{k=1}^{3}P_{ijk}) & \\
(04)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \sum\limits_{j=1}^{8}\sum\limits_{k=1}^{3}P_{ijk}W_k\le\sum\limits_{h=1}^{3}\left(Q_{ih}Y_h\right) & i=1..6\\
(05)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \sum\limits_{h=1}^{3}Q_{ih}\le 1 & \\
(06)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \sum\limits_{i=1}^{N}P_{ijk}=G_{jk} & j=1..8;k=1..3\\
(07)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & P_{ij1}\times\sum\limits_{J=j+1}^{4}\left(P_{ij2}+P_{iJ3}\right)=0 & j=1..3\\
(08)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & P_{ij2}\times\sum\limits_{J=j+1}^{4}P_{iJ3}=0 & j=1..3\\
(09)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & P_{ij1}\times\sum\limits_{J=5}^{j-1}\left(P_{ij2}+P_{iJ3}\right)=0 & j=6..8\\
(10)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & P_{ij2}\times\sum\limits_{J=5}^{j-1}\left(P_{iJ3}\right)=0 & j=6..8\\
(11)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \left(\sum\limits_{j=1}^{4}\sum\limits_{k=1}^{3}P_{ijk}\right)\times\left(\sum\limits_{j=5}^{8}\sum\limits_{k=1}^{3}P_{ijk}\right)=0 &
\end{cases}$$

【模型解释】

目标　规划车次阶段的运费（包括港口出车费用、载重费用和空载费用）最小，需要运输 N 车次。

约束:
（1） 第 i 车次的空载费用；
（2） 0－1 变量 Q_{ih} 表示第 i 次派车是否派出第 h 种运输车；
（3） $f_{ij}=1$，表示在第 i 次出车时第 j 个公司没收到任何货物；$f_{ij}=0$，表示收到过货物；
（4） 第 i 车次的运载总量不超过本次派车的最大载重量，当 $Q_{ih}=0$ 时，P_{ijk} 一定为 0；
（5） 每次最多只能派出一种车；
（6） 送货量满足每一个公司的需求量；
（7）～（11）属于大小件卸货顺序的约束
（7） 为 1～4 号公司送货时，运输车顺时针行驶。当在第 j（j＝1…3）个公司卸下原料 A 时，本车次不能再为后续公司运送 B 和 C；
（8） 为 1～4 号公司送货时，运输车顺时针行驶。当在第 j（j＝1…3）个公司卸下原料 B 时，本车次不能再为后续公司运送 C；
（9） 为 8～5 号公司送货时，运输车逆时针行驶。当在第 j（j＝8…6）个公司卸下原料 A 时，本车次不能再为后续公司运送 B 和 C；
（10） 为 8～5 号公司送货时，运输车逆时针行驶。当在第 j（j＝8…6）个公司卸下原料 B 时，本车次不能再为后续公司运送 C；
（11） 第 i 车次只能以一种方向行驶。

5.3.2 规划车次模型求解

（类似求解问题二）由于定理二的成立，可以对模型进行如下变化：

优化一：目标优化，将常量（载重运费）预先计算 3949.2 元，代入目标，可提高目标计算速度(*LINGO* 软件在全局寻优时没改变一次变量值需要重复计算目标值)，也可以直接取消。

优化二：模型分步求解，通俗的理解：1~4 号公司单独运用模型求解，5~6 号公司单独运用模型求解。这样做的好处是还可以取消约束（11），取消等式约束大大减少了软件求解复杂度，人为地提高了算法效率。

具体 *LINGO* 程序见（x.xx），在求解时需使用　全局最优设置

变量解释：P(i,j,k)表示第 i 次送货到第 j 个公司的第 k 种货物的单位数
F(i , k)表示第 i 次使用第 k 种车

1～4 号公司，【取消常量（载重运费）】				
目标值（空车费）	P(1,2,2)=1	(0-1 变量)		对偶价
213.8000	P(1,4,2)=1	F(1, 2)	1.000000	0.000000
	P(2,1,1)=2	F(2, 3)	1.000000	0.000000
	P(3,1,2)=1	F(3, 2)	1.000000	2.700000
	P(3,2,2)=1	F(4, 2)	1.000000	0.000000
	P(4,2,3)=2	F(5, 2)	1.000000	0.000000
	P(4,4,1)=1	F(6, 2)	1.000000	0.000000
	P(5,4,1)=1	F(7, 2)	1.000000	0.000000
	P(5,4,3)=2	F(8, 3)	1.000000	-2.700000
	P(6,3,3)=2	F(10, 3)	1.000000	-2.700000
	P(6,4,1)=1	F(11, 3)	1.000000	-4.800000
	P(7,3,1)=1	F(12, 2)	1.000000	0.000000
	P(7,3,3)=2	（注：对偶价表示松弛程度）		
	P(8,1,3)=1			
	P(8,2,1)=1			
	P(8,2,2)=1			

	P(10,1,3)=2 P(10,2,2)=2 P(11,1,1)=2 P(12,1,3)=2 P(12,3,1)=1	
5～8 号公司，【取消常量（载重运费）】		
目标值 （空车费）	P(1,6,2)=2 P(1,6,3)=1 P(1,7,3)=1 P(2,5,2)=2 P(2,5,3)=2 P(3,8,2)=2 P(4,5,1)=1 P(4,5,3)=2 P(4,7,3)=2 P(5,8,1)=2 P(6,7,2)=2 P(6,7,3)=2 P(7,8,1)=1 P(7,8,2)=1 P(7,8,3)=1 P(8,7,1)=2 P(9,8,1)=2 P(10,6,2)=2 P(10,6,3)=2	(0-1 变量)　　　　对偶价 F(1, 3)　1.000000　0.000000 F(2, 3)　1.000000　0.000000 F(3, 2)　1.000000　0.000000 F(4, 3)　1.000000　0.000000 F(5, 3)　1.000000　0.000000 F(6, 3)　1.000000　0.000000 F(7, 3)　1.000000　0.000000 F(8, 3)　1.000000　-3.600000 F(9, 3)　1.000000　-5.400000 F(10, 3)　1.000000　-2.400000 （注：对偶价表示松弛程度）

5.3.3 结果分析

从求解结果可以看出，派车方案中没有调度载重量是 4 吨的运输车，我们可以论证，这是非常合理的，并且具有现实意义。论证如下：

假设 8 吨位车与 4 吨位车都运 8 吨货物且行驶相同里程数 x（公里），则费用分别为：

$$0.7x+10$$
$$0.2x+10+0.2x+10$$

当且仅当 $0.7x+10>0.2x+10+0.2x+10$ 时，使用 4 吨位车比较经济，解得：

$$x>\frac{100}{3}$$

而本题环形回路的一半路程为 30 公里，小于 $\frac{100}{3}$ 公里，说明并不需要使用 4 吨位的车，而且从全局考虑为了个别出车添加派车是非常不符合实际情况，同时也不具有经济优势。

经过以上论述，说明本文的派车方案是可行的。

5.3.4 派车方案的确立

与问题二不同的是，此时有三种不同载重量的运输车可以选择，对规划车次模型的结果进行分析，可知：6 吨载重量的车选用了 7 次，总工作时间是 9.7125 小时。若全部采用 6 吨载重量的车，将采用两辆；而载重为 8 吨的车必须用两辆时，时间却很充裕，若用 8 吨载重量的车剩余时间去代替 6 吨车运输一部分（选择运输时间偏短的两次运输，即距离港口最近的两次运输），那么仅需 3 辆车，2 辆 8 吨位车，1 辆 6 吨位车，空载

运输费用相应增加一点，但增加的运输费用小于 20 元，即小于增开一辆 6 吨运输车的费用，因此选择用 8 吨车代替 6 吨车运输一部分这一方案，使得运费较少。派车方法和问题二（卸货完毕之后调头返回港口），得出较优答案如下：

载量	车辆	次数	公司	货物	时间（小时）	运费（元）	总时间（小时）
6 吨	第一辆	1	2, 4	B, B	1.5501	1436.4	7.4171
		2	2, 4	2C, A	1.5501		
		3	4	2C, A	1.3834		
		4	3, 4	2C, A	1.5501		
		5	1, 3	2C, A	1.3834		
8 吨	第二辆	1	1	2A	0.6834	1504.8	7.3005
		2	1, 2	B, B	1.0834		
		3	6	2B, 2C	0.9167		
		4	1, 2	C, AB	1.0834		
		5	1, 2	2C, 2B	1.0834		
		6	1	2A	0.6834		
		7	5	2B, 2C	1.1834		
		8	8	2A	0.5834		
	第三辆	1	3	2C, A	1.2167	1496.9	7.135
		2	5, 7	A2C, 2C	1.3501		
		3	7	2B, 2C	0.7834		
		4	6, 7	2BC, C	1.0834		
		5	8	A, B	0.5834		
		6	8	2A	0.5834		
		7	7, 8	A, A	0.9501		
		8	8	2B, C	0.5834		
总运费	**4338.1 元**						

6 模型讨论

在解决货运公司的运输问题时，本文的优点之一是对卸货有序性控制的较好，采用的是“逐点遍历、以此瞻后”的思想（利用每个公司的卸货情况限制它的后续公司的卸货情况），既囊括了所有的大小件搭配运输的所有卸货情况，又不显得繁琐难懂。

优点之二是在解决问题二的过程中，我们反复推敲，严格取证，给出了两个运输过程特性定理的证明，对解决问题起到了合理的简化作用，这种合理定理的获取也十分具有现实意义。

在问题三中，派车方案中不包括 4 吨位的运输车，也经过了证明，说明了派车方案的可行性。