

# 血管三维重建

作者：汤志高等 hihhi@qq.com

[摘要]

本文通过对样本断面的数字化处理，运用计算机重建血管三维形态，得出血管轴线方程和管体半径。

对断面特征图像文件数值化：视位图图像黑色像素点为 0，白色为 1，在 MATLAB 中建立图像矩阵 A。对 A 进行转化，建立图像轮廓矩阵  $X_{ij}, Y_{ij}$ ，通过  $X_{ij}, Y_{ij}$  绘制出血管三维重建图形。

在求解管道半径时，结合三维图形与断面图形特征，发现管道半径  $R_g$  即为断面图形最大内切圆半径  $r$ ，轴线与断面的交点即为最大内切圆圆心，并在 6.1.1 中给出了严格证明。就此，将问题转化为求解断面的最大内切圆的半径。

基于转化的目标，首先加入内圆约束（内切圆半径不大于圆心到断面边界上任意一点的距离）；然后采用约束算法“四向扫描法”（见 6.4.1）使约束加细，限制圆心坐标  $(x_i, y_i) \in D$ 。主要原理是对图象矩阵 A 再次转化，将每个断面的边界都分割成四部分，分离出各断面图形的上、下、左、右轮廓，建立四向轮廓矩阵，对圆心坐标从四个方向约束，当圆心坐标同时满足四个约束时，圆心一定位于断面内部。最后，以  $(x_i, y_i)$  为决策变量，内切圆半径  $r$  最大为目标建立非线性规划模型，采用 LINGO 软件编程求解，最终管道半径为 29.7069； $(x_i, y_i)$  坐标集（见附录 10.1）。

在求解中轴线的过程中，首先建立  $z_i$  向量（即各内切圆圆心  $(x_i, y_i)$  的  $z$  坐标），运用 100 张断面与中轴线的交点在  $xoz$  和  $yozy$  平面的投影，建立  $xoz$  面的投影坐标集  $(x_i, z_i)$ ，采用高次非线性多项式拟合得到平面曲线方程  $x = f(z)$ ，同理对  $yozy$  面的投影坐标集  $(y_i, z_i)$  采用同样方法得到平面曲线方程  $y = f(z)$ ，以  $z$  为参数，由经过上述两条曲线的空间曲面方程的联立，建立了中轴线方程。

最后根据空间中轴线的方程，可以分别画出中轴线在  $xoy$  面， $xoz$  面， $yozy$  面的轴线投影图和中轴线的空间图象。

## 1 问题重述

断面可用于了解生物组织、器官等的形态。例如，将样本染色切成厚约  $1\mu\text{m}$  的切片，在显微镜下观察该横断面的组织形态结构。如果用切片机连续不断地将样本切成数十、成百的平行切片，可依次逐片观察。根据拍照并采样得到的平行切片数字图象，运用计算机可重建组织、器官等准确的三维形态。

假设某些血管可视为一类特殊的管道，该管道的表面是由球心沿着某一曲线（称为中轴线）的球滚动包络而成。例如圆柱就是这样一种管道，其中轴线为直线，由半径固定的球滚动包络形成。

现有某管道的相继 100 张平行切片图象，记录了管道与切片的交点。图象文件名依次为 0.bmp、1.bmp、…、99.bmp，格式均为 BMP，宽、高均为 512 个像素 (pixel)。为简化起见，假设：管道中轴线与每张切片有且只有一个交点；球半径固定；切片间距以及图象像素的尺寸均为 1。

取坐标系的  $Z$  轴垂直于切片，第 1 张切片为平面  $Z=0$ ，第 100 张切片为平面  $Z=99$ 。 $Z=z$  切片图象中像素的坐标依它们在文件中出现的前后次序为

$(-256, -256, z)$  ,  $(-256, -255, z)$  ,  $\dots$   $(-256, 255, z)$  ,  
 $(-255, -256, z)$  ,  $(-255, -255, z)$  ,  $\dots$   $(-255, 255, z)$  ,  
.....  
 $(255, -256, z)$  ,  $(255, -255, z)$  ,  $\dots$   $(255, 255, z)$  。

试计算管道的中轴线与半径，给出具体的算法，并绘制中轴线在  $XY$ 、 $YZ$ 、 $ZX$  平面的投影图。

## 2 模型假设

- (1) 血管管道粗细均匀；
- (2) 切片相继平行；
- (3) 切片厚度相同；
- (4) 管道壁表面光滑；
- (5) 样本染色之后对拍照采样获取数据、切片厚度没有影响；
- (6) 管道中轴线与每张切片有且只有一个交点；
- (7) 切片图像真实反映切片原貌及性质；

## 3 符号说明

$R_g$	管道半径
$D$	切片的平面区域
$r_i$	第 $i$ 张切片的最大内切圆的半径
$G$	中轴线在 $XY$ 平面投影方程的系数矩阵
$E$	中轴线在 $XZ$ 平面投影方程的系数矩阵
$C$	中轴线在 $YZ$ 平面的投影方程系数矩阵

## 4 问题分析

用切片机连续不断地将血管样本切成数十、成百的平行切片，可依次逐片观察。根据拍照并采样得到的平行切片数字图象，运用计算机可重建血管准确的三维形态，克服了直接通过显微镜等仪器不能直观的总体观察血管形态的缺点。

提取重建血管的关键为：血管中轴线和固定半径的确定。主要有下面几个要点：

### ◆ 血管的重建

运用计算机重建血管的三维形态的过程，是利用从大量的切片的数字图像中获取数据，把切片有序排列起来，本质上是在计算机中将血管数字化。

### ◆ 对管道半径的换位思考

“血管管道”示以人的概念比较复杂，可以将其表面视为由球心沿着某一曲线（称为中轴线）的球滚动包络而成，管道半径就是这个球的半径。设想球沿着我们用若干切片重组的管道顺势滚动，球顺利通过每一张切片的必要条件是：每一张切片的最大内切圆的半径等于球半径，也就是管道的半径。就此，将空间问题转化在平面内解决——在切片所在的平面求解管道半径。

### ◆ 中轴线如何确定

管道中轴线与每张切片有且只有一个交点，平行切片是相继的，相继交点的轨迹即为中轴线的走向。当切片的数量有限时，所有交点亦不足以精确确定中轴线的方程，可以通过拟合空间曲线的方法近似求解。

## 5 血管的三维重建

通过 MATLAB 的图像文件接口，调用 *IMREAD* 函数将 100 张切片位图读入程序中，把精度为  $512 \times 512$  的黑白像素点转化为整形数据（黑色像素点为 0，白色像素点为 1）。下面是具体操作过程：

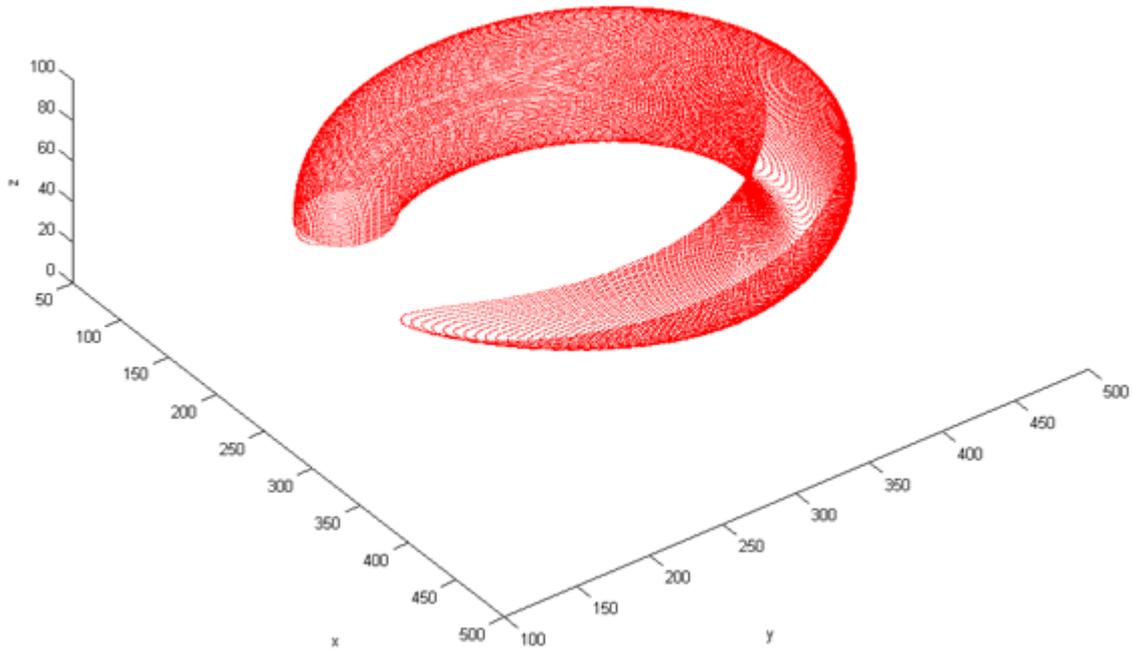
- ◆ 获取平面切片图形下轮廓：对  $i$  张图像分别从左至右，从下到上扫描，在第  $j$  列获得第一个黑像素点时记录横坐标  $X_{ij}^{BOTTOM}$ ，纵坐标  $Y_{ij}^{BOTTOM}$ ；
- ◆ 获取平面切片图形上轮廓：对  $i$  张图像分别从左至右，从上到下扫描，在第  $j$  列获得第一个黑像素点时记录横坐标  $X_{ij}^{TOP}$ ，纵坐标  $Y_{ij}^{TOP}$ ；
- ◆ 获取平面切片图形左轮廓：对  $i$  张图像分别从上到下，从左至右扫描，在第  $j$  行获得第一个黑像素点时记录横坐标  $X_{ij}^{LEFT}$ ，纵坐标  $Y_{ij}^{LEFT}$ ；
- ◆ 获取平面切片图形右轮廓：对  $i$  张图像分别从上到下，从右至左扫描，在第  $j$  行获得第一个黑像素点时记录横坐标  $X_{ij}^{RIGHT}$ ，纵坐标  $Y_{ij}^{RIGHT}$ ；

以上读取算法获取的 8 个矩阵可以为以后数据计算、边界判断提供方便，但是显然 8 个矩阵中存在重复元素，这在以后的一般操作时将会降低效率，所以我们将重复元素排除，合并 8 个边界矩阵到  $X_{ij}, Y_{ij}$

$X_{ij}$  表示第  $i$  张切片第  $j$  个轮廓点横坐标

$Y_{ij}$  表示第  $i$  张切片第  $j$  个轮廓点纵坐标

将空间离散点  $(X_{ij}, Y_{ij}, i)$  绘出，即可得到血管重建图形如下



血管三维重建图形

## 6 管道半径的求解

### 6.1 模型准备

#### 6.1.1 对切片最大内切圆的半径即为管道半径的证明

**已知：**结合题意，管道半径固定，对管道做若干平行切片

**求证：**切片的最大内切圆等价于管道的横截面

**证明：**为便于证明问题，作简要示意图如下：

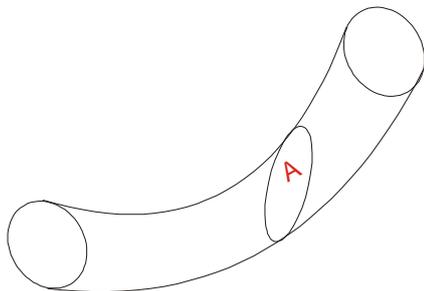


图 1—管道示意图(A 为切片的切面)

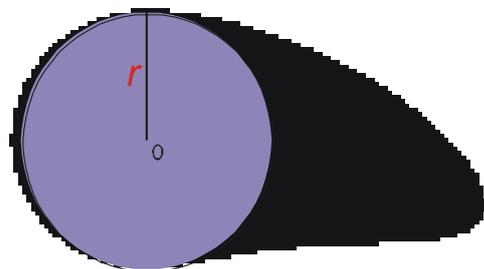


图 2—切片 A 的鸟瞰图

管道的表面可以设想为由球心沿着中轴线的球滚动包络而成。球心的滚动轨迹即为管道的中轴线。中轴线与每张切片有且仅有一个交点。这个交点就是球心。

如图 1 所示，当球沿着管道顺势滚动时，必然经过切片 A 面。也就是说，切片 A 面恰好能够允许球通过，这使得切片 A 内部有且仅有一个最大内切圆（见图 2），它的半

径  $r$  等于球的半径  $R$ ，即

$$r = R \tag{1.1}$$

管道的横截面是球的一个过球心的截面，显然该截面是一个圆，圆的半径  $R'$  等于球的半径，也等于管道的半径  $R_g$ ，即

$$R' = R = R_g \tag{1.2}$$

由(1.1)和(1.2)可知，

$$r = R_g \tag{1.3}$$

又因为管道的半径固定，也就是球的半径固定，因此所有的切片（提供的切片数目为 100）的最大内切圆的半径必须相等，都等于管道半径。

综上，血管切片的最大内切圆等价于管道的横截面。

证毕。

## 6.2 模型分析

目标分析：

根据 6.1.1 的证明可知。切片最大内切圆等价于管道的横截面，最大内切圆的半径等于管道的半径。取坐标系的  $Z$  轴垂直于切片，即切片平行与  $XY$  平面。只要在切片平面内求解最大内切圆的半径即可。

约束分析：

(1) 在切片内部寻求一个圆，使它成为最大内切圆，圆心一定在切片边界组成的封闭区域  $D_i$  ( $i=1 \cdots N$ ， $N$  表示切片的数量) 内

$$(x_i, y_i) \in D_i$$

(2) 最大内切圆的半径要小于圆心到边界上任意一点的距离。设第  $i$  个切片的最大内切圆的圆心坐标为  $(x_i, y_i)$ ，第  $i$  张切片边界的第  $j$  个点的坐标为  $(X_{ij}, Y_{ij})$ ，已经由模型准备 6.1.2 中获得。所以，最大内切圆半径应该小于圆心到这些离散点的任意一点的距离

$$r_i \leq \sqrt{(x_i - X_{ij})^2 + (y_i - Y_{ij})^2} \quad (\text{设第 } i \text{ 张切片的边界的点的个数为 } n_i, \text{ 则 } j = 1 \cdots n_i)$$

## 6.3 建立模型

根据模型分析，在平行于  $XY$  的平面内，以切片的内切圆的半径最大为目标，半径圆心到边界的距离 为约束，建立最优化模型如下：

$$\text{MAX } Z = r_i \tag{1.4}$$

$$S.T \begin{cases} r_i \leq \sqrt{(x_i - X_{ij})^2 + (y_i - Y_{ij})^2} & \cdots \cdots \cdots (1) \\ (x_i, y_i) \in D_i & \cdots \cdots \cdots (2) \\ i = 1 \cdots N & \cdots \cdots \cdots (3) \\ j = 1 \cdots n_i & \cdots \cdots \cdots (4) \end{cases}$$

### 模型注释

- (1.4) 求解第  $i$  张切片内部内切圆半径的最大值即为最大内切圆的半径。
- (1) 切片最大内切圆的半径不大于圆心到切片边界上任意一点的距离；
  - (2) 表示最大内切圆的圆心在切片内部；
  - (3) 切片数量为 100；
  - (4) 第  $i$  张切片图像的边界上的点的个数为  $n_i$ 。

#### 符号说明

$r_i$	第 $i$ 张切片最大内切圆的半径即管道半径
$(x_i, y_i)$	第 $i$ 张切片的最大内切圆的圆心坐标
$(X_{ij}, Y_{ij})$	第 $i$ 张切片的边界上点的坐标
$D_i$	第 $i$ 张切片覆盖的范围
$n_i$	第 $i$ 张切片边界上的点的个数
$N$	切片数目

## 6.4 对圆心坐标约束的讨论和模型求解

### 6.4.1 约束加细

对表示圆心的点坐标的限制  $(x_i, y_i) \in D_i$ ，求解模型时需要分情况讨论：

◆ 在组成切片边界的所有点中，它们的横、纵坐标分别存在最大值和最小值，如下面的图 3，切片所有的点的坐标值都不能超出这个长方形区域，最大内切圆的圆心坐标  $(x_i, y_i)$  也就不能超出这个范围。具体限制条件如下：

圆心横坐标小于所有边界点横坐标的最大值  $\text{MAX}_{j=1}^{n_i} \{X_{ij}\} > x$

圆心纵坐标小于所有边界点纵坐标的最大值  $\text{MAX}_{j=1}^{n_i} \{Y_{ij}\} > y$

圆心横坐标大于所有边界点横坐标的最小值  $\text{MIN}_{j=1}^{n_i} \{X_{ij}\} < x$

圆心纵坐标大于所有边界点纵坐标的最小值  $\text{MIN}_{j=1}^{n_i} \{Y_{ij}\} < y$

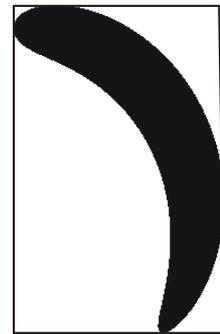


图 3

◆ 采用“四向扫描限定圆心法”将圆心坐标限制在切片内部

不等式  $r_i \leq \sqrt{(x_i - X_{ij})^2 + (y_i - Y_{ij})^2}$  中， $(X_{ij}, Y_{ij})$  表示切片边界点的坐标，仅有图 3 所示限制的长方形区域的限制，并不能使  $(x_i, y_i)$  一定位于切片内部，更谈不上使  $(x_i, y_i)$  表示切片的内切圆的圆心坐标。所以，我们定义了易于理解、便于操控的“四向扫描限定圆心法”

#### “四向扫描限定圆心法”原理：

在切片内部寻找最大内切圆的圆心时，圆心坐标不能超出它的正上、正下、正左、正右四个方向上的 4 个边界点的坐标值所限定的小范围，即

1. 圆心的纵坐标应该小于它的正上方在边界线上的点的纵坐标；
2. 圆心的纵坐标应该大于它的正下方在边界线上的点的纵坐标；

3. 圆心的横坐标应该小于它的正右方在边界线上的点的横坐标;
4. 圆心的横坐标应该大于它的正左方在边界线上的点的横坐标。

这 4 个点的横坐标或者纵坐标分别与圆心存在相等的关系。所以易于理解、便于操控。

若将圆心的确定过程形象地看作扫描过程，按照标题 5 血管的三维重建中获取切片轮廓方法，依次从上向下、从下向上、从左至右、从右至左扫描，将切片边界分成上轮廓、下轮廓、左轮廓、右轮廓 4 部分。再根据圆心变量  $(x_i, y_i)$ ，寻找圆心的正上、正下、正左、正右四个方向上的 4 个边界点，当圆心坐标同时满足原理的 1.2.3.4 这四个条件时，圆心坐标一定在切片的内部。

### “四向扫描限定圆心法”的数学描述如下：

数据图像宽、高均为 512 个像素 (pixel)，像素的尺寸为 1，因此切片边界点的坐标是连续的整数值。但是切片的最大内切圆圆心坐标不一定是整数，将圆心的坐标四舍五入取整  $([x_i], [y_i])$ ，使圆心坐标和切片边界的点具有相等可比性。将“四向扫描限定圆心法”分四个方向分别进行数学描述：

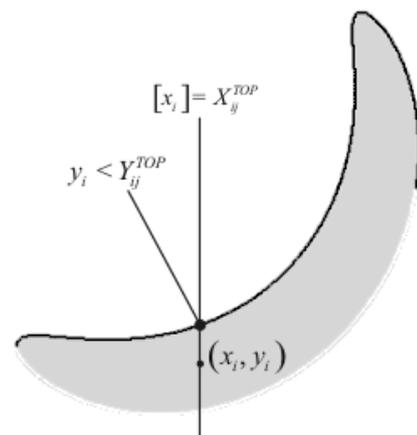
#### (1) 从上向下扫描

对第  $i$  张图像分别从左至右，从上到下扫描，在第  $j$  列获得第一个黑像素点时记录横坐标  $X_{ij}^{TOP}$ ，纵坐标  $Y_{ij}^{TOP}$ ，得到了平面切片图形上面轮廓的所有的点。上面轮廓如右图黑色线条所示。

圆心的纵坐标  $y_i$  应该小于它对应的正上方边界线上的点的纵坐标  $Y_{ij}^{TOP}$ ，如右图所示。

圆心的纵坐标  $y_i$  与上边界的其它边界点的纵坐标没有大小关系。圆心的纵坐标  $y_i$  小于图像的上界限（高度）512 即可。两种情况概括表示为

$$y_i < \begin{cases} Y_{ij}^{TOP} & [x_i] = X_{ij}^{TOP} \\ 512 & [x_i] \neq X_{ij}^{TOP} \end{cases}$$

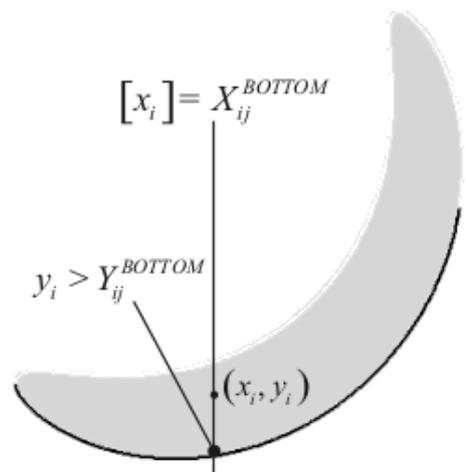


#### (2) 从下向上扫描

对第  $i$  张图像分别从左至右，从下到上扫描，在第  $j$  列获得第一个黑像素点时记录横坐标  $X_{ij}^{BOTTOM}$ ，纵坐标  $Y_{ij}^{BOTTOM}$ ，获取了平面切片图形下面轮廓的所有的点。下面轮廓如右图黑色线条所示。

圆心的纵坐标  $y_i$  应该小于它对应的正下方边界线上的点的纵坐标  $Y_{ij}^{BOTTOM}$ ，如右图所示。

圆心的纵坐标  $y_i$  与下边界其它的边界点的纵坐标没有大小关系。圆心的纵坐标  $y_i$  大于图象的



下界限 0 即可。两种情况概括表示为

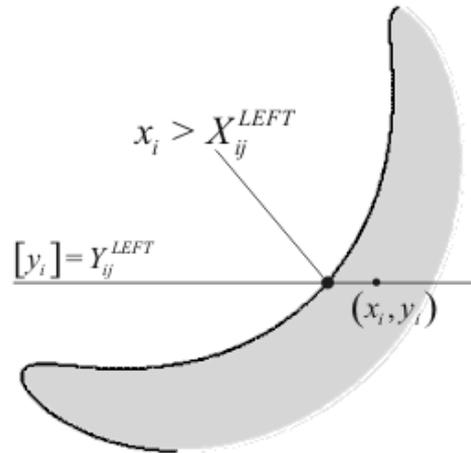
$$y_i > \begin{cases} Y_{ij}^{BOTTOM} & [x_i] = X_{ij}^{BOTTOM} \\ 0 & [x_i] \neq X_{ij}^{BOTTOM} \end{cases}$$

### (3) 从左至右扫描

对第  $i$  张图像分别从下到上，从左至右扫描，在第  $j$  行获得第一个黑像素点时记录横坐标  $X_{ij}^{LEFT}$ ，纵坐标  $Y_{ij}^{LEFT}$ ，得到了平面切片图形左面轮廓的所有的点。左面轮廓如右图黑色线条所示。

圆心的横坐标  $x_i$  应该小于它对应的正左方边界线上的点的横坐标  $X_{ij}^{LEFT}$ ，如右图所示。

圆心的横坐标  $x_i$  与左面轮廓上其它的边界点的纵坐标没有大小关系。圆心的横坐标  $x_i$  大于图象的左界限 0 即可。两种情况概括表示为



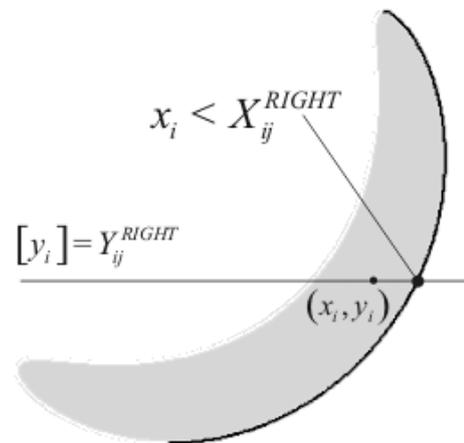
$$x_i > \begin{cases} X_{ij}^{LEFT} & [y_i] = Y_{ij}^{LEFT} \\ 0 & [y_i] \neq Y_{ij}^{LEFT} \end{cases}$$

### (4) 从右至左扫描

对第  $i$  张图像分别从下到上，从右至左扫描，在第  $j$  行获得第一个黑像素点时记录横坐标  $X_{ij}^{RIGHT}$ ，纵坐标  $Y_{ij}^{RIGHT}$ ，得到了平面切片图形右面轮廓上的所有的点。右面轮廓如右图黑色线条所示。

圆心的横坐标  $x_i$  应该小于它对应的正右方边界线上的点的横坐标  $X_{ij}^{RIGHT}$ ，如右图所示。

圆心的横坐标  $x_i$  与右面轮廓上其它的边界点的横坐标没有大小关系。圆心的横坐标  $x_i$  小于图像的右界限（宽度）512 即可。两种情况概括表示为



$$x_i < \begin{cases} X_{ij}^{RIGHT} & [y_i] = Y_{ij}^{RIGHT} \\ 512 & [y_i] \neq Y_{ij}^{RIGHT} \end{cases}$$

## 6.4.2 建立求解模型

根据前面的分析，每张切片的最大内切圆的半径最大时，100 张切片的最大内切圆

半径之和一定最大；由于切片之间相互独立，当 100 张切片的最大内切圆半径之和最大时，每张切片的最大内切圆的半径也都是最大的。所以，将原模型的多目标转化为单目标

$$Z = \sum_{i=1}^{100} r_i$$

以加细后的圆心坐标为约束，建立求解模型如下：

$$MAX Z = \sum_{i=1}^{100} r_i \quad (1.5)$$

$$\left. \begin{array}{l}
 r_i \leq \sqrt{(x_i - X_{ij})^2 + (y_i - Y_{ij})^2} \quad j = 1 \cdots n_i \quad \dots\dots\dots(01) \\
 y_i < \begin{cases} Y_{ij}^{TOP} & [x_i] = X_{ij}^{TOP} \\ 512 & [x_i] \neq X_{ij}^{TOP} \end{cases} \quad \dots\dots\dots(02) \\
 y_i > \begin{cases} Y_{ij}^{BOTTOM} & [x_i] = X_{ij}^{BOTTOM} \\ 0 & [x_i] \neq X_{ij}^{BOTTOM} \end{cases} \quad \dots\dots\dots(03) \\
 x_i > \begin{cases} X_{ij}^{LEFT} & [y_i] = Y_{ij}^{LEFT} \\ 0 & [y_i] \neq Y_{ij}^{LEFT} \end{cases} \quad \dots\dots\dots(04) \\
 x_i < \begin{cases} X_{ij}^{RIGHT} & [y_i] = Y_{ij}^{RIGHT} \\ 512 & [y_i] \neq Y_{ij}^{RIGHT} \end{cases} \quad \dots\dots\dots(05) \\
 j = 1 \cdots n_{ik} \quad \dots\dots\dots(06) \\
 MAX_{j=1}^{n_i} \{X_{ij}\} > x_i \quad \dots\dots\dots(07) \\
 MAX_{j=1}^{n_i} \{Y_{ij}\} > y_i \quad \dots\dots\dots(08) \\
 MIN_{j=1}^{n_i} \{X_{ij}\} < x_i \quad \dots\dots\dots(09) \\
 MIN_{j=1}^{n_i} \{Y_{ij}\} < y_i \quad \dots\dots\dots(10) \\
 i = 1..100 \quad \dots\dots\dots(11)
 \end{array} \right\} S.T$$

**【求解模型解释】**

(1.5) 100 张切片的最大内切圆半径之和最大。

(01) 第 i 张切片的最大内切圆的半径小于圆心到切片边界任一点（实际只有  $n_i$  个离散的点）的距离；

(02) 最大内切圆的圆心的纵坐标小于它的正上方在边界线上的点的纵坐标；

- (03) 最大内切圆的圆心的纵坐标大于它的正下方在边界线上的点的纵坐标;
- (04) 最大内切圆的圆心的横坐标小于它的正右方在边界线上的点的横坐标;
- (05) 最大内切圆的圆心的横坐标大于它的正左方在边界线上的点的横坐标;
- (06) 当  $k=1, 2, 3, 4$  时,  $n_{ik}$  是(02)(03)(04)(05)的边界线上的点的个数;
- (07) 对最大内切圆圆心横坐标的上界约束;
- (08) 对最大内切圆圆心纵坐标的上界约束;
- (09) 对最大内切圆圆心横坐标的下界约束;
- (10) 对最大内切圆圆心纵坐标的下界约束;
- (11) 切片数量为 100。

**附：对求解模型的符号说明**

$Y_{ij}^{TOP}$	第 i 张切片最大内切圆圆心的正上方在边界线上的点的纵坐标	$X_{ij}^{TOP}$	第 i 张切片最大内切圆圆心的正上方在边界线上的点的横坐标
$Y_{ij}^{BOTTOM}$	第 i 张切片最大内切圆圆心的正下方在边界线上的点的纵坐标	$X_{ij}^{BOTTOM}$	第 i 张切片最大内切圆圆心的正下方在边界线上的点的横坐标
$Y_{ij}^{LEFT}$	第 i 张切片最大内切圆圆心的正左方在边界线上的点的纵坐标	$X_{ij}^{LEFT}$	第 i 张切片最大内切圆圆心的正右方在边界线上的点的横坐标
$Y_{ij}^{RIGHT}$	第 i 张切片最大内切圆圆心的正右方在边界线上的点的纵坐标	$X_{ij}^{RIGHT}$	第 i 张切片最大内切圆圆心的正右方在边界线上的点的横坐标
$[x_i]$	对最大内切圆圆心横坐标 $x_i$ 取整	$[y_i]$	对最大内切圆圆心纵坐标 $y_i$ 取整
$n_{ik}$	第 i 张切片第 k 条边界上的点的数量	$r_i$	第 i 张切片最大内切圆的半径

其它符号与原模型的含义相同

**【求解结果】**

- (1) 100 张切片的最大内切圆的半径之和为：2927.018。
- (2) 理论上，这 100 个半径值是相等的，但是由于数据图像的经度不够，求解的每张切片的最大内切圆的半径并不相等。但是根据管道的表面可以设想为由球心沿着中轴线的球滚动包络而成的思想可以理解，既然管道的半径是固定的，管道半径应该取 100 张切片的最大内切圆的半径的最大值

$$R_g = 29.7069$$

- (3) 1~100 张切片的最大内切圆的半径以及切片与中轴线的交点见附录 1。

**6.4.3 算法**

运用最优化模型求解软件 LINGO 编程求解，程序见附录 3。

**6.4.4 半径的误差分析**

100 个最大内切圆的半径并不相等，以相对误差和方差来反映计算的准确度。

(1) 半径的相对误差 =  $\frac{|\text{各个最大内切圆的半径} - \text{管道半径}|}{\text{管道半径}} \times 100\%$ ，即

$$\varepsilon_i = \frac{|r_i - R_g|}{R_g} \times 100\%$$

具体结果详见附录 2。

从各个相对误差可以看出，都在 1% 至 2% 左右，误差较小。说明计算比较准确。

- (2) 对 100 个半径计算方差，反映计算结果的波动程度。

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{100} (r_i - \frac{\sum_{i=1}^{100} r_i}{100})^2}{100}$$

经过计算，方差为 0.0318，管道在各处的半径波动很小。

## 7 管道中轴线的求解

### 7.1 问题分析

每张切片与中轴线只有一个交点，上文在利用平行切片求解管道半径的时候，已经记录了每张切片与中轴线的交点坐标。直接对空间的点拟合空间直线的难度较大，我们通过间接拟合的方法，求得中轴线的一般方程。间接拟合是指对已知的中轴线上 100 个点在 XY、XZ、YZ 平面的投影坐标拟合平面内中轴线的投影线方程，由投影线的方程可以得到经过投影线且垂直与所在平面的唯一的曲面。空间曲线可以看作两个曲面的交线，所以，中轴线满足任意两条投影线得到的空间曲面方程组。

### 7.2 拟合投影曲线

将求得的 100 张切片与中轴线的交点集  $D(x,y,z)$ ，分别向 XY, YZ, XZ 三个坐标平面投影，得到平面坐标内的坐标。对这些点用多项式曲线拟合的方法拟合。由于这些点较为分散，需要拟合的曲线的幂次较高，才能达到一定的精确度。

(1) 设中轴线在 XY 平面的投影方程为  $Y=GX$ ，其中  $G$  为系数矩阵。

$$Y = g_n x^n + g_{n-1} x^{n-1} + g_{n-2} x^{n-2} + \dots + g_0 x^0$$

通过 MATLAB 软件中的多项曲线拟合函数将 100 张切片与中轴线的交点在 XY 坐标平面的投影点拟合，发现当拟合的未知数的最高幂为 12 时，效果较好。可以求得系数矩阵  $G$ 。

$$G^T = \begin{pmatrix} -4.8037 \times 10^{-24} \\ 1.5751 \times 10^{-20} \\ -2.323 \times 10^{-17} \\ 2.0411 \times 10^{-14} \\ -1.1883 \times 10^{-11} \\ 4.8246 \times 10^{-9} \\ -1.3996 \times 10^{-6} \\ 2.92 \times 10^{-4} \\ 4.3449 \times 10^{-2} \\ 4.4931 \\ -306.36 \\ 12363 \\ -2.2307 \times 10^5 \end{pmatrix}$$

(2) 设中轴线在 YZ 平面的投影方程为  $Y=CZ$ ，其中 C 为系数矩阵。

$$Y = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + c_{n-2} z^{n-2} + \cdots + c_0 z^0$$

将 100 张切片与中轴线的交点在 YZ 坐标平面的投影点拟合，当拟合的未知数的最高幂为 9 时，效果较好。可以求得系数矩阵 C。

$$C^T = \begin{pmatrix} 3.0982 \times 10^{-15} \\ -4.6596 \times 10^{-12} \\ 1.0784 \times 10^{-9} \\ -8.2576 \times 10^{-8} \\ 6.0455 \times 10^{-7} \\ 1.6813 \times 10^{-4} \\ -5.381 \times 10^{-3} \\ 7.2615 \times 10^{-2} \\ -9.1348 \times 10^{-2} \\ 256.72 \end{pmatrix}$$

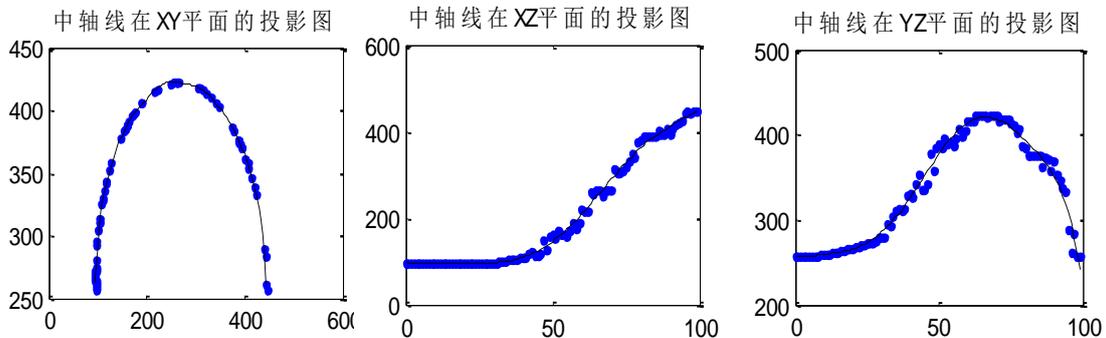
(3) 设中轴线在 XZ 平面的投影方程为  $X=EZ$ ，其中 E 为系数矩阵。

$$X = e_n z^n + e_{n-1} z^{n-1} + e_{n-2} z^{n-2} + \cdots + e_0 z^0$$

将 100 张切片与中轴线的交点在 XZ 坐标平面的投影点拟合，当拟合的未知数的最高幂为 6 时，效果较好。可以求得系数矩阵 E。

$$E^T = \begin{pmatrix} 1.1909 \times 10^{-8} \\ -3.4731 \times 10^{-6} \\ 3.5575 \times 10^{-4} \\ -1.4988 \times 10^{-2} \\ 2.7935 \times 10^{-1} \\ -2.0478 \\ 99.241 \end{pmatrix}$$

中轴线在三个平面内的投影的拟合图如下：



### 7.3 利用曲面求解中轴线

在三维坐标系中， $X=GB$  表示由在  $XY$  平面的曲线以平行于  $Z$  轴向空间无限延伸而得到的曲面。 $Y=CD$  表示由在  $YZ$  平面的曲线以平行于  $X$  轴向空间无限延伸而得到的曲面。 $Z=EF$  表示由在  $XZ$  平面的曲线以平行于  $Y$  轴向空间无限延伸而得到的曲面。而血管中轴线正是两两曲面的交线。

选取  $X=GB$  和  $Y=CD$  作为确定中轴线的曲面。即血管中轴线的曲线方程为

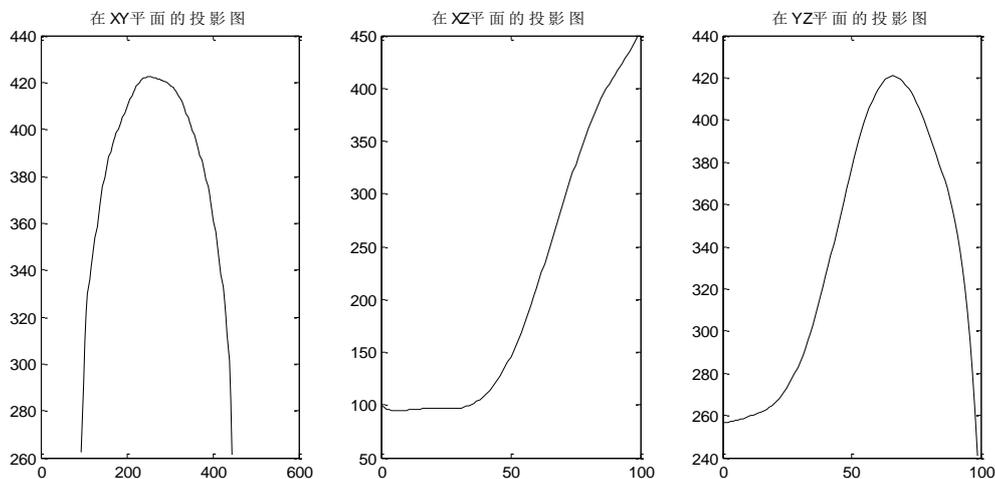
$$\begin{cases} X = GZ \\ Y = CZ \end{cases}$$

$G$  为系数矩阵，见 7.2(1)

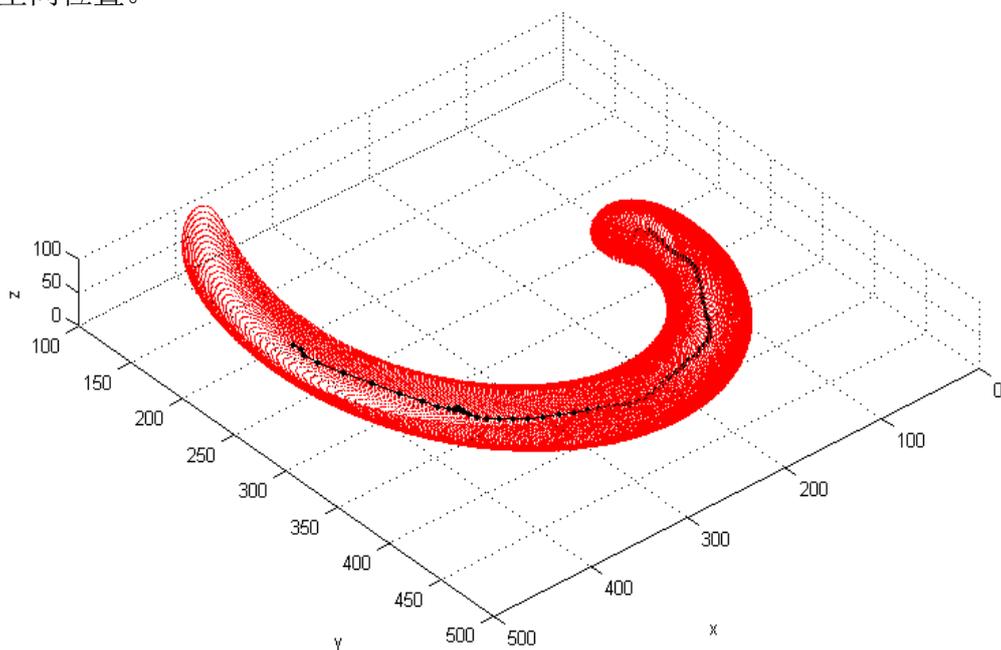
$C$  为系数矩阵，见 7.2(2)

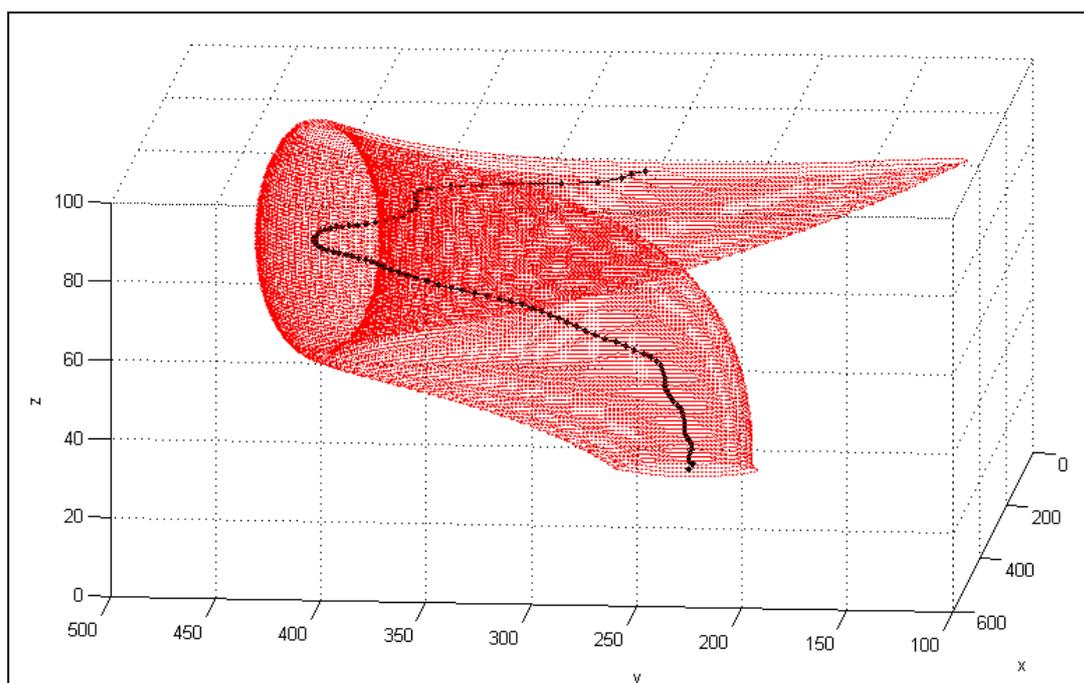
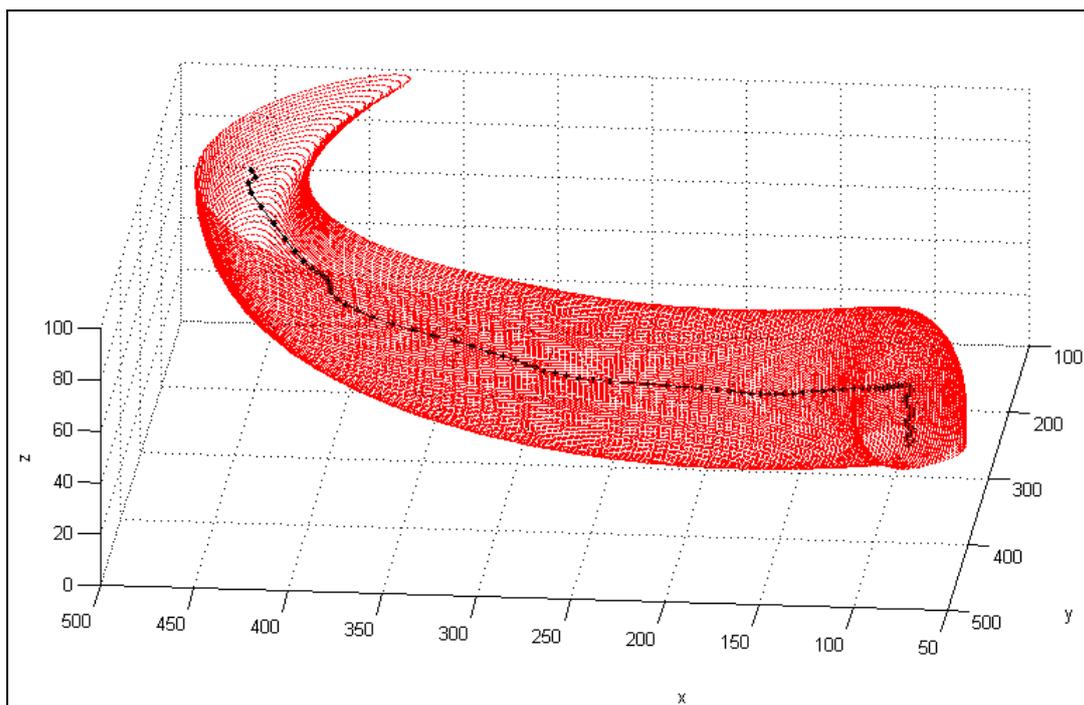
### 7.4 绘出中轴线的投影图和空间中轴线图形

根据空间中轴线的方程，分别令方程中的  $z=0$ ,  $y=0$ ,  $x=0$ , 对应绘出中轴线在  $XY$ 、 $XZ$ 、 $YZ$  平面的投影图如下：



根据空间中轴线的方程绘制出空间中轴线图形，下面的三张图象从不同的角度反映了中轴线的空间位置。





## 8 进一步讨论

切片数量越多，数据图像的像素越多，根据管道半径模型求解出的半径就越精确，重建血管的效果越好。管道半径模型具有较强的健壮性，可以根据每一张切片求解各处的管道半径。

## 9 参考文献

[1] Duane Hanselman, Bruce Littlefield 著, 朱仁峰 译 精通 MATLAB 7 清华大学出版社 2006

[2]

## 10 附录

### 10.1 附录 1

切片编号		半径	横坐标 x	纵坐标 y	z
1	球体半径 r(1)	29.00862	95.99138	257	0
2	球体半径 r(2)	29.00862	95.99138	257	1
3	球体半径 r(3)	29.00848	95.99153	257.0085	2
4	球体半径 r(4)	29.03335	95.96667	257.0333	3
5	球体半径 r(5)	29.03335	95.96667	257.0333	4
6	球体半径 r(6)	29.03335	95.96667	257.0333	5
7	球体半径 r(7)	29.05256	95.95064	257.4313	6
8	球体半径 r(8)	29.05603	95.94828	257.5	7
9	球体半径 r(9)	29.07759	95.92241	258	8
10	球体半径 r(10)	29.10268	95.90043	258.4251	9
11	球体半径 r(11)	29.13793	95.86207	259	10
12	球体半径 r(12)	29.16964	95.83333	259.4167	11
13	球体半径 r(13)	29.21552	95.78448	260	12
14	球体半径 r(14)	29.21552	95.78448	261	13
15	球体半径 r(15)	29.31035	95.68966	262	14
16	球体半径 r(16)	29.36633	95.63793	262.5	15
17	球体半径 r(17)	29.36633	95.63793	263.5	16
18	球体半径 r(18)	29.487	95.51724	264.5	17
19	球体半径 r(19)	29.487	95.51724	265.5	18
20	球体半径 r(20)	29.487	95.51724	266.5	19
21	球体半径 r(21)	29.50238	95.5	266.625	20
22	球体半径 r(22)	29.50238	95.5	267.625	21
23	球体半径 r(23)	29.50238	95.5	268.625	22
24	球体半径 r(24)	29.487	95.51724	270.5	23
25	球体半径 r(25)	29.42241	95.57759	271	24
26	球体半径 r(26)	29.31035	95.68966	272	25
27	球体半径 r(27)	29.21552	95.78448	273	26
28	球体半径 r(28)	29.05256	95.95064	273.5687	27
29	球体半径 r(29)	29.0033	96	274.5625	28
30	球体半径 r(30)	29.16964	96.16667	280.4167	29
31	球体半径 r(31)	29.10268	96.09957	280.4251	30

32	球体半径 r(32)	29.10268	96.09957	280.4251	31
33	球体半径 r(33)	29.14091	98.7	295.95	32
34	球体半径 r(34)	29.18093	98.12712	293.2288	33
35	球体半径 r(35)	29.14091	100.7	303.95	34
36	球体半径 r(36)	29.27244	102.7703	310.7432	35
37	球体半径 r(37)	29.27244	103.7703	313.7432	36
38	球体半径 r(38)	29.27245	102.7703	310.7432	37
39	球体半径 r(39)	29.27242	103.7703	313.7434	38
40	球体半径 r(40)	29.30359	109.6908	327.9046	39
41	球体半径 r(41)	29.2976	110.8539	330.2185	40
42	球体半径 r(42)	29.30359	108.6908	325.9046	41
43	球体半径 r(43)	29.30017	117.5	342.5	42
44	球体半径 r(44)	29.2679	124.1712	352.4966	43
45	球体半径 r(45)	29.30359	113.3092	335.0954	44
46	球体半径 r(46)	29.30359	113.6908	335.9046	45
47	球体半径 r(47)	29.30149	117.6659	342.7227	46
48	球体半径 r(48)	29.34872	147.7246	378.2192	47
49	球体半径 r(49)	29.38173	128.1934	357.7454	48
50	球体半径 r(50)	29.05999	156.4569	385.5539	49
51	球体半径 r(51)	29.15378	160.5722	388.7371	50
52	球体半径 r(52)	29.38173	154.2547	383.8067	51
53	球体半径 r(53)	29.15773	170.3571	395.2143	52
54	球体半径 r(54)	29.34092	160.2601	388.5767	53
55	球体半径 r(55)	29.26338	162.7411	390.3309	54
56	球体半径 r(56)	29.3983	159.4249	387.9335	55
57	球体半径 r(57)	29.31717	172.4912	396.5147	56
58	球体半径 r(58)	29.30359	191.0954	406.3092	57
59	球体半径 r(59)	29.30017	175.5	398.5	58
60	球体半径 r(60)	29.30359	189.9046	405.6908	59
61	球体半径 r(61)	29.1211	222.1892	417.0541	60
62	球体半径 r(62)	29.26804	215.0809	415.1764	61
63	球体半径 r(63)	29.00431	271.5	422	62
64	球体半径 r(64)	29.00431	261.5	422	63
65	球体半径 r(65)	29.00431	256.5001	422	64
66	球体半径 r(66)	29.50238	263.625	422.5	65
67	球体半径 r(67)	29.50238	262.625	422.5	66
68	球体半径 r(68)	29.47059	249.379	421.4682	67
69	球体半径 r(69)	29.50424	263.5	422.5	68
70	球体半径 r(70)	29.50238	263.625	422.5	69
71	球体半径 r(71)	29.50238	265.625	422.5	70
72	球体半径 r(72)	29.12216	314.3043	415.913	71
73	球体半径 r(73)	29.21193	305.7929	417.9646	72

74	球体半径 r(74)	29.21193	305.7929	417.9646	73
75	球体半径 r(75)	29.14091	308.95	417.3	74
76	球体半径 r(76)	29.26805	319.9191	414.1763	75
77	球体半径 r(77)	29.26234	329.6783	410.9459	76
78	球体半径 r(78)	29.30359	347.0954	403.6908	77
79	球体半径 r(79)	29.30359	340.0954	406.6908	78
80	球体半径 r(80)	29.31719	374.5751	386.9334	79
81	球体半径 r(81)	29.30147	378.2547	384.1933	80
82	球体半径 r(82)	29.38173	386.7872	376.859	81
83	球体半径 r(83)	29.3983	379.7453	382.8067	82
84	球体半径 r(84)	29.30149	379.7453	382.8067	83
85	球体半径 r(85)	29.26439	378.6716	383.7145	84
86	球体半径 r(86)	29.34883	384.2754	379.2193	85
87	球体半径 r(87)	29.34874	384.2754	379.2193	86
88	球体半径 r(88)	29.34919	391.753	372.753	87
89	球体半径 r(89)	29.34874	394.247	370.247	88
90	球体半径 r(90)	29.34874	405.7807	357.7246	89
91	球体半径 r(91)	29	394	370	90
92	球体半径 r(92)	29.05999	408.4461	354.4569	91
93	球体半径 r(93)	29.01261	415.0933	345.5622	92
94	球体半径 r(94)	29.07703	419.6923	338.6154	93
95	球体半径 r(95)	29.00748	423.2478	332.3487	94
96	球体半径 r(96)	29.14088	440.7	289.05	95
97	球体半径 r(97)	29.0033	445	261.5625	96
98	球体半径 r(98)	29.1703	444.1642	270.5949	97
99	球体半径 r(99)	29.12216	439.913	292.3043	98
100	球体半径 r(100)	29.1211	440.9459	288.1892	99

## 10.2 附录 2——半径误差

		相对误差
1	球体半径 r(1)	29.00862 0.023506
2	球体半径 r(2)	29.00862 0.023506
3	球体半径 r(3)	29.00848 0.02351
4	球体半径 r(4)	29.03335 0.022673
5	球体半径 r(5)	29.03335 0.022673
6	球体半径 r(6)	29.03335 0.022673
7	球体半径 r(7)	29.05256 0.022027
8	球体半径 r(8)	29.05603 0.02191
9	球体半径 r(9)	29.07759 0.021184
10	球体半径 r(10)	29.10268 0.02034
11	球体半径 r(11)	29.13793 0.019153
12	球体半径 r(12)	29.16964 0.018085

13 球体半径 r(13)	29.21552	0.016541
14 球体半径 r(14)	29.21552	0.016541
15 球体半径 r(15)	29.31035	0.013349
16 球体半径 r(16)	29.36633	0.011464
17 球体半径 r(17)	29.36633	0.011464
18 球体半径 r(18)	29.487	0.0074024
19 球体半径 r(19)	29.487	0.0074024
20 球体半径 r(20)	29.487	0.0074024
21 球体半径 r(21)	29.50238	0.0068845
22 球体半径 r(22)	29.50238	0.0068845
23 球体半径 r(23)	29.50238	0.0068845
24 球体半径 r(24)	29.487	0.0074024
25 球体半径 r(25)	29.42241	0.0095764
26 球体半径 r(26)	29.31035	0.013349
27 球体半径 r(27)	29.21552	0.016541
28 球体半径 r(28)	29.05256	0.022027
29 球体半径 r(29)	29.0033	0.023685
30 球体半径 r(30)	29.16964	0.018085
31 球体半径 r(31)	29.10268	0.02034
32 球体半径 r(32)	29.10268	0.02034
33 球体半径 r(33)	29.14091	0.019052
34 球体半径 r(34)	29.18093	0.017705
35 球体半径 r(35)	29.14091	0.019053
36 球体半径 r(36)	29.27244	0.014625
37 球体半径 r(37)	29.27244	0.014625
38 球体半径 r(38)	29.27245	0.014625
39 球体半径 r(39)	29.27242	0.014625
40 球体半径 r(40)	29.30359	0.013576
41 球体半径 r(41)	29.2976	0.013778
42 球体半径 r(42)	29.30359	0.013576
43 球体半径 r(43)	29.30017	0.013691
44 球体半径 r(44)	29.2679	0.014778
45 球体半径 r(45)	29.30359	0.013576
46 球体半径 r(46)	29.30359	0.013576
47 球体半径 r(47)	29.30149	0.013647
48 球体半径 r(48)	29.34872	0.012057
49 球体半径 r(49)	29.38173	0.010946
50 球体半径 r(50)	29.05999	0.021776
51 球体半径	29.15378	0.018619
52 球体半径	29.38173	0.010946
53 球体半径	29.15773	0.018486
54 球体半径	29.34092	0.01232

55 球体半径	29.26338	0.01493
56 球体半径	29.3983	0.010388
57 球体半径	29.31717	0.013119
58 球体半径	29.30359	0.013576
59 球体半径	29.30017	0.013691
60 球体半径	29.30359	0.013576
61 球体半径	29.1211	0.019719
62 球体半径	29.26804	0.014773
63 球体半径	29.26805	0.014773
64 球体半径	29.00431	0.023651
65 球体半径	29.00431	0.023651
66 球体半径	29.50238	0.0068845
67 球体半径	29.50238	0.0068845
68 球体半径 r(68)	29.47059	0.0079547
69 球体半径 r(69)	29.50424	0.0068221
70 球体半径 r(70)	29.50238	0.0068845
71 球体半径 r(71)	29.50238	0.0068845
72 球体半径 r(72)	29.12216	0.019684
73 球体半径 r(73)	29.21193	0.016662
74 球体半径 r(74)	29.21193	0.016662
75 球体半径 r(75)	29.14091	0.019053
76 球体半径 r(76)	29.26805	0.014773
77 球体半径 r(77)	29.26234	0.014965
78 球体半径 r(78)	29.30359	0.013576
79 球体半径 r(79)	29.30359	0.013576
80 球体半径 r(80)	29.31719	0.013119
81 球体半径 r(81)	29.30147	0.013648
82 球体半径 r(82)	29.38173	0.010946
83 球体半径 r(83)	29.68175	0.0008466
84 球体半径 r(84)	29.7069	0.00E+00
85 球体半径 r(85)	29.68175	0.0008467
86 球体半径 r(86)	29.5485	0.0053321
87 球体半径 r(87)	29.68175	0.0008467
88 球体半径 r(88)	29.34919	0.012041
89 球体半径 r(89)	29.34874	0.012056
90 球体半径 r(90)	29.34874	0.012056
91 球体半径 r(91)	29	0.023796
92 球体半径 r(92)	29.05999	0.021776
93 球体半径 r(93)	29.01261	0.023371
94 球体半径 r(94)	29.07703	0.021203
95 球体半径 r(95)	29.00748	0.023544
96 球体半径 r(96)	29.14088	0.019054

97球体半径 r(97)	29.0033	0.023685
98球体半径 r(98)	29.21193	0.016662
99球体半径 r(99)	29.50237	0.006885
100球体半径 r(100)	29.50424	0.0068221