学生面试组策略优化

作者：汤志高，牛传正，曹莹颖

摘要：本文通过矩阵线性变换分析，计算机贪婪寻优，解决在面试分组过程中出现的组合优化 NP 类难问题。

在分配表示形式上，本文对 N 位学生 M 个老师采用 0-1 矩阵表示，记为 A_{nm}。用 $A \cdot A^T$（N-N 阵）分析任意两位学生的“面试组”面试老师相同的情形，得出当 N-N 阵中除对角线外最大元素小于 4 时是满足 Y2 要求的充分必要条件；问题一即是 Y2 约束的加强，因此在 N 已知情况下可建立以 N-N 阵内元素都小于 2、3 为约束，以分配阵 A 为决策变量，M 最小为目标的 0-1 规划模型，可以在 N 较小时求得最优 M 值和完整分配方案。

在 N 较大时组合优化问题显然是无法通过规划模型在有效时间内计算出最优解的，我们通过 $A^T \cdot A$（M-M 阵）结合上述规划模型求解得到的小范围最优结果，可以分析出每一次增加 N、M 后 M-M 阵内元素改变的规律，通过反向模拟思想，我们建立了能够求解较大规模问题的算法 1，并且对产生的 N 与 M 之间的数量关系在输入量较小情况下使用 0-1 规划模型进行验证，表明具有一定的准确性。

第二问 N 与 M 较大，无法适用规划模型求解，我们通过添加贪婪因子（Y1、Y3、Y4 转化而成）在算法 1 中，达到对面试学生尽量公正的目的，并且通过 N-N 严格禁止了任两位学生的“面试组”面试老师完全相同的情形，即 Y2 约束。最后，为了达到更好的分配效果我们直接将两位学生的“面试组”都没有三位面试老师相同的情形代替 Y2，并且得到了可行方案。

第三问对老师进行了分类，组合总数从 C_M^4 降低到 $C_{\frac{M}{2}}^2 \cdot C_{\frac{M}{2}}^2$，导致相同数量 N 需要更多的 M 才能够顺利面试，我们与问题一、二相同，分别建立了不同的规划求解方案和贪婪寻优算法，得到了不同情况下的具体分配方案。

对于上述分配方案，我们分别对 Y1、Y3、Y4 指标进行了达标分析，得出了各个分配方案的具体指标数量，并且结合了三维图形分析了老师们的工作量。

对于第四问，为提高公平性，本文对于面试学生与老师的分配方案给出了几点建议。

关键字：线性变换　贪婪寻优　0-1 规划模型　反向模拟思想

1 问题重述

1.1 问题背景

高校自主招生是高考改革中的一项新生事物，现在仍处于探索阶段。某高校拟在全面衡量考生的高中学习成绩及综合表现后再采用专家面试的方式决定录取与否。该校在今年自主招生中，经过初选合格进入面试的考生有 N 人，拟聘请老师 M 人。每位学生要分别接受 4 位老师（简称该学生的“面试组”）的单独面试。面试时，各位老师独立地对考生提问并根据其回答问题的情况给出评分。由于这是一项主观性很强的评价工作，老师的专业可能不同，他们的提问内容、提问方式以及评分习惯也会有较大差异，因此面试同一位考生的“面试组”的具体组成不同会对录取结果产生一定影响。

1.2 问题要求

为了保证面试工作的公平性，组织者提出如下要求；

Y1. 每位老师面试的学生数量应尽量均衡；

Y2. 面试不同考生的“面试组”成员不能完全相同；

Y3. 两个考生的“面试组”中有两位或三位老师相同的情形尽量的少；

Y4. 被任意两位老师面试的两个学生集合中出现相同学生人数尽量的少。

1.3 问题提出

问题一：设考生数 N 已知，在满足 Y2 条件下，说明聘请老师数 M 至少分别应为多大，才能做到任两位学生的“面试组”都没有两位以及三位面试老师相同的情形。

问题二：请根据 Y1～Y4 的要求建立学生与面试老师之间合理的分配模型，并就 N＝379，M＝24 的情形给出具体的分配方案（每位老师面试哪些学生）及该方案满足 Y1～Y4 这些要求的情况。

问题三：假设面试老师中理科与文科的老师各占一半，并且要求每位学生接受两位文科与两位理科老师的面试，请在此假设下分别回答问题一与问题二。

问题四：请讨论考生与面试老师之间分配的均匀性和面试公平性的关系。为了保证面试的公平性，除了组织者提出的要求外，你们认为还有哪些重要因素需要考虑，试给出新的分配方案或建议。

2 问题分析

本文是要解决在学生面试中的老师对学生的分配问题，基于题目所提出的要求，我们采用最优化的思想，设法将这些要求转化为目标或约束，依次解决给出的几个问题。

2.1 问题一分析

对于问题一，在学生数给出的情况下，基于任“两位学生的“面试组”都没有两位、三位面试老师相同”的要求，设法将要求转化为只含 0-1 变量的矩阵表达式来约束，用原矩阵（学生——老师矩阵）和矩阵转置相乘得到的矩阵（学

生——学生矩阵）中的量作为限制约束，建立模型，来实现最优化求解。

2.2 问题二分析

对于问题二，依次分析给定的几个要求，将每位老师面试的学生数量尽量均衡转化为方差最小；对于不同考生的面试组中，成员不能完全相同、任两学生的面试组两三位老师相同的数量尽量少，用（学生——学生）矩阵中的量进行表示。对于“被任意两位老师面试的两个学生集合中出现相同学生的人数尽量的少”的要求，同样可以把它抽象到矩阵中的要求，即矩阵中任两老师列的相同学生数要尽量小。

2.3 问题三分析

对于问题三，要求每位学生接受两位文科与两位理科老师的面试，基于第二问所建立的老师——学生矩阵，将文科老师与理科老师分别与学生建立 0-1 关系矩阵，在满足第一问的要求下，以每一矩阵中“学生行”之和为二作为约束建立最优化模型，求解在学生数给定情况下的最少所需老师数。对于学生、老师数都给定的情况下，在满足 Y1—Y4 的条件下，建立最优化模型，并给出分配方案。

2.4 问题四分析

对于问题四，本文从面试组的组成；面试的过程；评分过程几方面给出了改进分配方案的几点建议，并提出了几点特殊要求。

3 模型假设

1）面试老师与学生都服从分配；

2）假设所有老师都按时到考场；

3）每个面试老师对待每个学生都是公正的；

4 符号说明

A	“学生——老师”阵，表示某位学生是否接受某位老师的面试
M	“老师——老师”阵，表示任两老师共同面试的学生个数
N	“学生——学生”阵，表示任两学生的面试组中相同老师个数
f_j	表示是否聘用第 j 个老师，为 1 时聘用；0 时不聘
n_{ij}	N 阵中元素，表示任两学生的面试组中相同老师个数
a_{ij}	A 阵中元素，表示某位学生是否接受某位老师的面试

5 模型的建立与求解

本部分共建立了以下四个模型：

模型Ⅰ：针对问题 1 建立的 0-1 整数规划模型

模型Ⅱ：针对问题 2 建立的多目标 0-1 整数规划模型

模型Ⅲⅰ：在问题 3 的假设下，建立的求解第 1 问的 0-1 整数规划模型

模型Ⅲⅱ：在问题 3 的假设下，建立的求解第 2 问的多目标 0-1 整数规划模型

5.0 模型准备——关系矩阵的建立

题目要求在满足特定要求下，建立数学模型计算：当考生数为 N 时，最少需要多少老师 M。

对于任意一位老师而言，他是否面试某位学生是确定的，反之，对于每位学生而言，他接不接受某位老师的面试也是确定的。基于这种一一对应关系，我们建立了表示学生与老师间、不同学生之间、不同老师之间的关系矩阵。

- **“学生——老师”矩阵**

对 N 个学生编号 $1\sim n$，M 个老师编号 $1\sim m$，则可得到一个表示老师与学生一一对应关系的 0—1 矩阵：“学生——老师”矩阵 $A=(a_{ij})_{N\times M}$ ：

引入决策变量：

$$a_{ij}=\begin{cases}1\text{........第}i\text{个学生接受第}j\text{个老师的面试}\\0\text{........第}i\text{个学生不接受第}j\text{个老师的面试}\end{cases}$$

$$A_{N\times M}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots\cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots\cdots & a_{2m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & a_{ij} & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots\cdots & a_{nm}\end{pmatrix}$$

N ——学生　　M ——老师　　$a_{ij}=0,1$

行分析：第 i 行中等于 1 的元素表示面试第 i 个学生老师，由于面试每个学生的老师共四人，所以每一行各元素相加应等于 4，即：

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = 4 \text{..........................} (i = 1, 2, \ldots n)$$

列分析：第 j 列中等于 1 的元素表示第 j 个老师面试的学生集。

- **“学生——学生”矩阵**

令矩阵 N 等于矩阵 A 承以它的转置，即 $N = AA^T$，则得到一个 n 阶方阵：

$$N = AA^T = (a_{ij})_{N\times N} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & a_{ij} & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

关于这个方阵的现实意义，下面将以 N 中元素 n_{22}, n_{23} 为例进行说明。

例 1： 第 2 行第 2 列元素：$n_{22} = {a_{21}}^2 + {a_{22}}^2 + \cdots + {a_{2m}}^2$

例 2： 第 2 行第 3 列元素：$n_{23} = a_{21} \cdot a_{31} + a_{22} \cdot a_{32} + \cdots + a_{2m} \cdot a_{3m}$

例 1 说明 N 中对角线上元素为 A 中每一行的元素平方求和，相当于各行元素求和；例 2 说 明 N 中该元素为 A 中第 2 行与第 3 行对应元素相承后求和，这相当于统计了两行中相同元素的个数。

结论： (2.1) N 中对角线上元素表示“面试第 i 个学生的老师数”

(2.2) 非对角线元素表示“两学生的面试组中相同老师个数”

(2.3) N 为一个实对称阵，其对角线元素为 4

- **“老师——老师”矩阵**

令矩阵 M 等于矩阵 A 的转置阵承以它本身，即 $M = A^T A$，则得到一个 m 阶方阵：

$$M = A^T A = (a_{ij})_{M\times M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots\cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots\cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & a_{ij} & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots\cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

关于这个方阵的现实意义，下面将以M中元素m_{22},m_{23}为例进行说明。

例 3： 第 2 行第 2 列元素： $m_{22}=a_{12}{}^{2}+a_{22}{}^{2}+\cdots+a_{m2}{}^{2}$

例 4： 第 2 行第 3 列元素： $m_{23}=a_{12}\cdot a_{13}+a_{22}\cdot a_{23}+\cdots+a_{m2}\cdot a_{m3}$

例 3 说明M中对角线上元素为A中每一列元素平方求和，相当于各列元素求和；例 4 说明M中该元素为A中第 2 列与第 3 列对应元素相承后求和，这相当于统计了两列相同元素的个数，即两个老师共同面试的学生数。

结论：(3.1) M中对角线上元素表示"<u>第j个老师面试的学生数</u>"

(3.2) M中非对角线元素表示"<u>两老师共同面试的学生数</u>"

(3.3) M为一个实对称阵。

5.1 问题一

5.1.1 模型分析

本模型为假设考生数 N 已知，在满足 Y2 的前提下，并在分别满足"任两位学生的面试组都没有两位以及三位面试老师相同"的条件下，建立计算最少需要聘请的老师数 M 的模型。

一、目标分析

引入 0—1 变量 f_j 表示是否聘用第j个老师，$f_j=1$ 聘用；$f_j=0$ 不聘用，目标应为聘用的老师数最少：

$$Min \quad \sum_{j=1}^{m} f_j$$

二、约束分析

由模型准备知，当满足 Y2 时，任两位学生的面试组不能有 4 位老师相同。

- <u>任两位学生的"面试组"都没有两位相同</u>

"不能有 2 位相同"的情况实质上隐含了"不能有 3 位相同"的情况，在加上 Y2 的要求，那末任两位学生最多有 1 个老师相同，即"学生——学生"阵中除对角线元素外，其余元素都小于 2。

$$n_{ij} \le 2 \quad ....(i \ne j)$$

$$N = AA^T = (n_{ij})_{N\times N}$$

- 任两位学生的“面试组”都没有三位相同

“不能有 3 位相同”说明最多可以有 2 位相同，即“学生——学生”阵中除对角线元素外，其余元素都小于 3。

$$n_{ij} \le 3 \quad ....(i \ne j)$$

5.1.2 模型 I 的建立

以聘用的老师数最少为目标，建立 0—1 整数规划模型如下：

$$Min \quad \sum_{j=1}^{m} f_j$$

$$s.t.\begin{cases} N = AA^T = (n_{ij})_{N\times N} & & ....(1) \\ \sum_{j=1}^{m} f_j \cdot a_{ij} = 4 & ....(i=1,2,...n) & ....(2) \\ or\begin{cases} n_{ij} < 2 \\ n_{ij} < 3 \end{cases} & \begin{matrix} ....(i \ne j) \\ ....(i \ne j) \end{matrix} & \begin{matrix} ....(3) \\ ....(4) \end{matrix} \\ a_{ij}, f_j = \{0,1\} & ....\begin{cases} i = 1,2,...n \\ j = 1,2...n \end{cases} & ....(5) \end{cases}$$

《注》: (3)和(4)是两种独立的情况，分别表示了任两位学生的“面试组”都没有两位及三位相同的情况。

模型说明：

(1)	N 为一个 n 阶方阵，表示学生间共用老师的关系
(2)	保证每位学生都由四个老师来面试
(5)	a_{ij}, f_j 只能取 0 或 1，即 0-1 变量

符号说明：

f_j	表示是否聘用第 j 个老师，为 1 时聘用；0 时不聘
n_{ij}	N 阵中元素，表示任两学生的面试组中相同老师个数
a_{ij}	A 阵中元素，表示某位学生是否接受某位老师的面试

5.1.3 模型Ⅰ的算法与求解

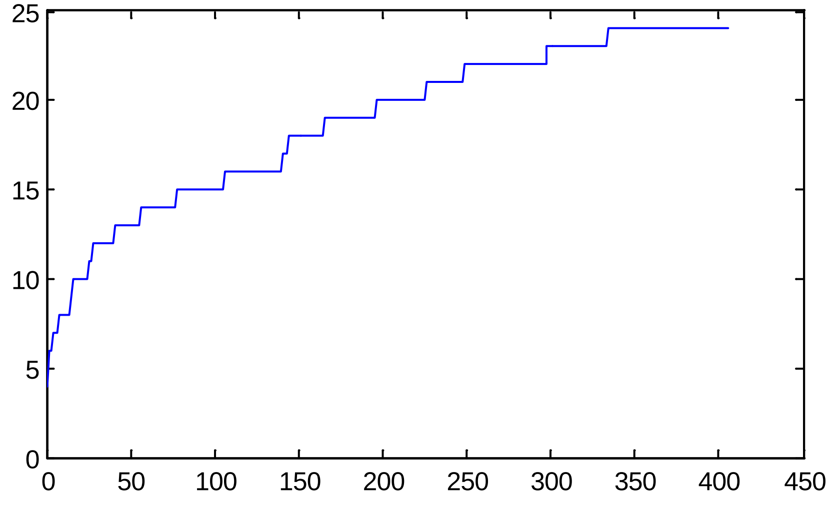
下面是用 ***Lingo*** 求解得到的部分结果，不同学生数所需的最少老师数。

任两位学生的“面试组”都没有二位面试老师相同的情形

学生数	15	16～24	25～27	28～40
老师数	9	10	11	12
学生数	41～55	56～77	78～105	106～140
老师数	13	14	15	16
学生数	141～143	144～165	166～195	196～225
老师数	17	18	19	20
学生数	226～248	249～297	298～333	334～405
老师数	21	22	23	24

任两位学生的“面试组”都没有三位面试老师相同的情形

学生数	1	2	3	4～5
老师数	4	7	9	10
学生数	6	7～9	10～13	14～15
老师数	11	12	13	16
学生数	16～17	18～20	21	22～24
老师数	17	18	19	20
学生数	25～26	27～30	31～33	34～35
老师数	21	22	23	24



图示说明：　横坐标：学生数　　　　纵坐标：所需最少老师数

图示分析： 由图中可直观看出函数成阶梯状单调递增趋势，说明老师每增加一个，可能面试的学生数增加多个。

5.2 问题二

5.2.1 模型分析

模型建立目的：本模型为建立学生与老师间合理的分配模型，使满足Y1～Y4 的要求。

为了保证面试的公平性，组织者对面试老师提出了若干要求，基于模型准备中对关系矩阵实际意义的分析，可以将题目中的要求 $Y1$~$Y4$ 用矩阵元素间关系表示，下面将给出具体表示方法。

- $Y1$:每位老师面试的学生数量尽量均衡

由"结论 (3.1)"知，M 阵中对角线上元素表示了每位老师面试的学生数，要使其数量尽量均衡，则应使老师面试学生数最多的与最少的差距尽量小，即：

$$Min \quad \left\{ \max(m_{ij}) - \min(m_{ij}) \right\} \quad ......(i = j)$$

- $Y2$:不同考生的"面试组"成员不完全相同

由"结论 (2.2)"知，"学生——学生"阵（N 阵）中非对角线元素表示两学生的面试组中相同的老师个数，面试组成员不完全相同，则相同老师个数小于 4。

$$n_{ij} < 4 \quad .....(i \neq j)$$

- $Y3$: 两考生"面试组"中有 2 或 3 位老师相同的情形尽量少

与$Y2$ 类似，由"结论 (2.2)"知，该条件可转化为N 阵中非对角线元素等于 2 或 3 的元素尽量少，即：

$$Min \quad \left\{ n_{ij} = 2 \, , n_{ij} = 3 \right\} \quad ......(i \neq j)$$

- $Y4$:任意两老师面试的学生集合中出现相同学生数尽量少

由矩阵 $A = (a_{ij})_{N \times M}$ 的列分析可知，A 中各列分别代表了不同老师面试的学生集，两列对应项相乘后，只有同时为 1（集合中学生相同）才能得 1，否则为 0，所以两集合中相同学生数即为A 阵中任意两列向量的内积。

将A 阵写成向量形式：

$$A_{N \times M} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$$

其中，α_m为n维列向量，则任意两向量的内积尽量小：

$$Min \quad \left[\alpha_j, \alpha_k\right] \qquad .....j \neq k....j,k \in (1,m)$$

《注》：$[\alpha,\beta]$ 表示两向量α,β的内积。

5.2.2 模型Ⅱ的建立

基于模型分析，以 $Y1$、$Y3$、$Y4$ 为目标，建立多目标 0-1 整数规划模型如下：

$$Min \quad \left\{ \max(m_{ij}) - \min(m_{ij}) \right\} \qquad ....(i=j)$$

$$Min \quad \left\{ n_{ij} = 2 \, , n_{ij} = 3 \right\} \qquad ....(i \neq j)$$

$$Min \quad \left[\alpha_j, \alpha_k\right] \qquad ...j,k \in (1,m)$$

$$s.t.\begin{cases} A = (a_{ij})_{N\times M} & & ....(1) \\ M = A^T A = (m_{ij})_{M\times M} & ......\begin{cases} i = 1,2,...n \\ j = 1,2...n \end{cases} & ....(2) \\ N = AA^T = (n_{ij})_{N\times N} & & ....(3) \\ \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = 4 & ......(i = 1,2,.....n) & ....(4) \\ n_{ij} < 4 & ......(i \neq j) & ....(5) \\ a_{ij} = \{0,1\} & & ....(6) \end{cases}$$

模型说明：

(1)(2)(3)	构造的矩阵，表示学生、老师相互关系。
(4)	保证每位学生都由四个老师来面试
(5)	不同考生面试组成员不同（$Y2$）
(6)	a_{ij} 只能取 0 或 1，即 0-1 变量

符号说明：

A	“学生——老师”阵，表示某位学生是否接受某位老师的面试
M	“老师——老师”阵，表示任两老师共同面试的学生个数
N	“学生——学生”阵，表示任两学生的面试组中相同老师个数

5.2.3 模型Ⅱ的算法与求解

上述规划模型显然属于组合优化 NP 类，因为在分配矩阵 A 中为大量整数组合，要产生最优解必须近似穷举所有组合才能够得到，我们编制了模型二的 Lingo 程序可以验证这一点。当输入量比较小的时候可以求得最优解，但是当输入比较大时求解时间几乎是指数级增加。

针对本题特点，本文通过贪心算法近似求解，将目标转化为可行贪心因子来迭代所求解。

主要是根据 MM 阵非对角线元素进行从小到大选取，一次分配 2 个老师，对于一个学生分配 2 次即可完成老师组，这样可以很好的控制 Y1 与 Y4 目标，在通过在 NN 阵中严格限制 Y2 条件来完成最终分配。

实际求解 N=379，M=24 时，我们加强了 Y2 约束，使得两个考生的“面试组”中没有三位老师相同情况，这样也能够求解成功，所以就成功的完成了 Y3 约束，具体程序算法如下：

Step1) 更新计算 M=A’*A，并对 M 上半角元素升序排序，得到队列 t，i=1；
Step2) 若 t(i)中对应的 2 位老师已有任意一位分配给该学生则：i=i+1，转 Step2；
Step3) 更新 A，计算 N= A*A’；
Step4) 若 N 中上半角元素值有大于等于给定约束数（Y2，Y3）的则：i=i+1，取消上步更新过的 A，转 Step2；
Step5) 记录更新分配矩阵 A；
Step6) 判断是否学生已分配完成；否：转 Step1，是：结束分配。

具体分配方案见附表 1

5.2.4 分配方案合理性分析

下面将通过分析构造的“学生——学生”阵及“老师——老师”阵中具体的统计数据，验证分配方案是否符合 Y1~Y4 四个要求。

●“学生——学生”阵 (379×379) 中数据分析

矩阵中的每一元素代表两个考生的“面试组”中相同的老师数，有与矩阵为是对称阵，所以仅对矩阵中上三角（不含对角线）中的量进行以下统计：

两个考生的“面试组”中相同老师数	在上三角中出现的频数	在上三角中出现的频率
0	32829	0.4583
1	30418	0.4246

2	8384	0.1171
3	0	0
4	0	0
总计	71631	1

数据分析：

1）由上表可看出：两考生中的“面试组”中相同老师数等于4的为0，说明分配方案符合面试不同考生的“面试组”成员不能完全相同（Y2）；

2）两个考生的“面试组”中有无三位老师相同的情形，而两位相同的仅占 11.71%，说明符合两个考生的“面试组”中有两位或三位老师相同的情形尽量的少（Y3）。

●“老师——老师”阵(24×24)中数据分析

矩阵中的每一元素代表了两位老师面试的学生集合中，出现相同学生的个数，统计对角线上的数据可得每一老师面试学生数：

对角线元素：各老师所面试的学生数					
老师编号	面试学生数	老师编号	面试学生数	老师编号	面试学生数
1	66	9	63	17	64
2	68	10	64	18	61
3	68	11	62	19	62
4	67	12	65	20	62
5	66	13	61	21	62
6	63	14	61	22	61
7	64	15	62	23	61
8	61	16	61	24	61

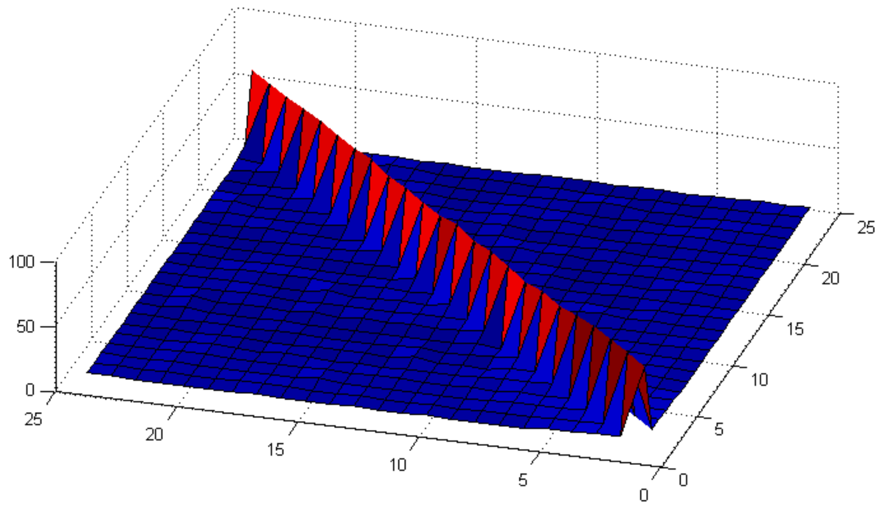
求得上表中数据的方差：$D(\xi)=5.5362$

数据分析：

1）方差较小，说明每位老师面试的学生数量较为均衡，说明分配方案符合每位老师面试的学生数量应尽量均衡的要求（Y1）。

2）两位老师面试的两个学生集合中出现相同学生的人数最大是 11，最小是 7，而老师面试的学生数最大是 68，最小是 61，分布均匀，说明分配方案对于符合（Y4）的要求。

绘出“老师——老师”矩阵（见附表二）的三维立体图如下：



图示说明：

1）坐标系：以 M 矩阵中老师对应编号为横纵坐标，以矩阵中对应元素值为竖坐标，建立三维立体坐标系。

2）对角线上点：对角线突出处高度反映了各老师共同面试的学生数。

3）其余点：其余点的高度反映了该点横纵坐标所代表的两老师共同面试的学生数。

图示分析：

1）对角线峰值分析：由图可知直观看出对角线峰值基本在同一高度，最大值与最小之间相差不大， 说明各位老师所面试的学生数基本相同，老师分配均匀，这符合：Y1. 每位老师面试的学生数量应尽量均衡。

2）其余点高度分析：上图显示由矩阵中非对角线元素的值所连接成的面较平坦，起伏不大，说明任意两老师共同面试的学生数较均衡，这符合 Y4.：被任意两位老师面试的两个学生集合中出现相同学生的人数尽量的少。

经过以上对结果的统计分析，计算结果符合各项要求，分配合理。

5.3 问题三

5.3.1 模型分析

本文为假设面试老师中理科与文科的老师各占一半，并且要求每位学生接受两位文科与两位理科老师的面试的情况下，重新讨论前两问。

那么相当于对前面的“学生——老师”矩阵从中间一分为二，假设左边代表文科，右边代表理科，可得如下矩阵：

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots\cdots & a_{1\frac{m}{2}} & a_{1(\frac{m}{2}+1)} \cdots\cdots\cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots\cdots & a_{2\frac{m}{2}} & a_{2(\frac{m}{2}+1)} \cdots\cdots\cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots\cdots & a_{n\frac{m}{2}} & a_{n(\frac{m}{2}+1)} \cdots\cdots\cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$1 \sim \frac{m}{2}$：文科老师　　　　$(\frac{m}{2}+1) \sim m$：理科老师

由于每位学生都要接受两位文科与两位理科老师的面试，相当于每一行在矩阵的左边有且仅有两个 1，右边也是有且仅有两个 1，其余全为 0，即：

$$\sum_{j=1}^{m/2} a'_{ij} = 2 \quad and \quad \sum_{j=(\frac{m}{2}+1)}^{m} a'_{ij} = 2 \quad ......(i = 1, 2, ...n)$$

5.3.2 模型Ⅲｉ (新假设下求解第一问)

1、　　模型Ⅲｉ的建立

在上述假设下,重新讨论问题一，则只须加入上述约束条件即可，基于问题一的模型，以聘用的老师数最少为目标，建立 0-1 整数规划模型如下：

$$Min \quad \sum_{j=1}^{m} f_j$$

$$
S.T.\begin{cases}
A' = (a'_{ij}) & & ....(1) \\
N = A'A'^{T} = (n_{ij})_{N\times N} & & \\
\sum_{j=1}^{m} f_j \cdot a'_{ij} = 4 & & ....(2) \\
and \begin{cases} \sum_{j=1}^{m/2} a'_{ij} = 2 \\ \sum_{j=(\frac{m}{2}+1)}^{m} a'_{ij} = 2 \end{cases} & ...(i = 1, 2, ...n) & ....(3) \\
or \begin{cases} n_{ij} \le 1 \\ n_{ij} \le 2 \end{cases} & \begin{matrix} ....(i \ne j) \\ ....(i \ne j) \end{matrix} & \begin{matrix} ....(4) \\ ....(5) \end{matrix} \\
a'_{ij}, f_j = \{0,1\} & ...\begin{cases} i = 1, 2, ...n \\ j = 1, 2...n \end{cases} & ....(6)
\end{cases}
$$

《注》: (4)和(5)是两种独立的情况，分别表示了任两位学生的“面试组”都没有两位及三位相同的情况。

模型说明：

(1)	A' 为一个 $n\times m$ 阶方阵，表示学生与老师间的关系
(2)	保证每位学生都由四个老师来面试
(3)	每位学生都要接受两位文科与两位理科老师的面试
(6)	a_{ij}, f_j 只能取 0 或 1，即 0-1 变量

符号说明：

f_j	表示是否聘用第 j 个老师，为 1 时聘用；0 时不聘
n_{ij}	N 阵中元素，表示任两学生的面试组中相同老师个数
a_{ij}	A 阵中元素，表示某位学生是否接受某位老师的面试

2、模型Ⅲ i 的算法与求解

下面是用 ***Lingo*** 求解得到的部分结果，不同学生数所需的最少老师数。

对于文科、理科老师各占一半的情况

任两位学生的“面试组”都没有二位面试老师相同的情形

学生数	1	3	12	18	36	63	124
老师数	4	6	8	10	12	14	16
学生数	137	200	251	352	408	553	735
老师数	18	20	22	24	26	28	30

任两位学生的“面试组”都没有二位面试老师相同的情形

学生数	1	2	5	9	10	14	16
老师数	4	8	10	12	14	16	18
学生数	20	25	31	35	41	48	
老师数	20	22	24	26	28	30	

5.3.3 模型Ⅲ ii (新假设下求解第二问)

1、模型Ⅲ ii 的建立

基于模型二的分析，仍以 $Y1$、$Y3$、$Y4$ 为目标，加入约束条件“每位学生都要接受两位文科与两位理科老师的面试”，建立多目标 0-1 整数规划模型如下：

$$Min \ \left\{ \max(m_{ij}) - \min(m_{ij}) \right\} \quad ....(i=j)$$

$$Min \ \left\{ n_{ij}=2 \, , n_{ij}=3 \right\} \quad ....(i \neq j)$$

$$Min \ \left[\alpha_j , \alpha_k \right] \quad .. \, j,k \in (1,m)$$

$$
s.t.\begin{cases}
A' = (a'_{ij})_{N\times M} & & \cdots\cdots\cdots(1) \\
M = A'^{T}A' = (m_{ij})_{M\times M} & & \cdots\cdots\cdots(2) \\
N = A'A'^{T} = (n_{ij})_{N\times N} & & \cdots\cdots\cdots(3) \\
\sum_{j=1}^{m} a'_{ij} = 4 & & \\
and \begin{cases} \sum_{j=1}^{m/2} a'_{ij} = 2 \\ \sum_{j=(\frac{m}{2}+1)}^{m} a'_{ij} = 2 \end{cases} & \ldots(i=1,2,\ldots\ldots n) & \begin{matrix}\cdots\cdots\cdots(4) \\ \cdots\cdots\cdots(5)\end{matrix} \\
n_{ij} < 4 & \ldots\ldots\ldots(i \neq j) & \cdots\cdots\cdots(6) \\
a'_{ij} = 0,1 & & \cdots\cdots\cdots(7)
\end{cases}
$$

模型说明：

(1)(2)(3)	构造的矩阵，表示学生、老师相互关系
(4)	保证每位学生都由两个文科老师来面试
(5)	保证每位学生都由两个理科老师来面试
(6)	不同考生面试组成员不同（$Y2$）
(7)	a_{ij} 只能取 0 或 1，即 0-1 变量

符号说明：

A'	“学生——老师”阵，表示某位学生是否接受某位老师的面试
M	“老师——老师”阵，表示任两老师共同面试的学生个数
N	“学生——学生”阵，表示任两学生的面试组中相同老师个数

2、模型Ⅲii 的算法与求解

在第二问求解时我们就使用了一位学生分配 2 次每次分配 2 位老师的做法，这样在第三问模型求解时我们只须加强对文理限制就可以求解可行方案，具体算法如下：

Step1) 更新计算 M=A’*A；
Step2) 若是分配理科老师（此时分配号为奇数）则转 Step2，否则转 Step3；
Step3) 对 M 上半角编号小于等于 12 的元素升序排序，得到队列 t，i=1，转 Step5；
Step4) 对 M 上半角编号大于 12 的元素升序排序，得到队列 t，i=1；
Step5) 若 t(i)中对应的 2 位老师已有任意一位分配给该学生则：i=i+1，转 Step2；
Step6) 更新 A，计算 N= A*A’；

Step7) 若 N 中上半角元素值有大于等于给定约束数（Y2，Y3）的则：i=i+1，取消上步更新过的 A，转 Step2；

Step8) 记录更新分配矩阵 A；判断是否学生已分配完成；否：转 Step1，是：结束分配。

具体分配方案见附表 3

5.4 问题四

——分配方案改进

由于面试是一项主观性很强的评价工作，老师的专业可能不同，他们的提问内容、提问方式以及评分习惯也会有较大差异，因此面试同一位考生的“面试组”的具体组成不同会对录取结果产生一定影响。

为提高公平性，本文对于面试学生与老师的分配方案给出如下几点建议：

一、关于面试组的组成要求

1）面试组老师分文理

由于不同学科老师知识面及所关心的问题会有较大不同，而不同学科的学生掌握的知识方面也差距很大，如果一个面试组的老师全为文科老师，对于面试一个文科生和一个理科生显然是不公平的，为了避免这种情况，应在选用老师时，使面试老师中理科与文科的老师各占一半，并且要求每位学生同时接受两位文科与两位理科老师的面试。

2）面试组老师分等级

老师水平的高低将极大程度影响对学生优劣的判断，所以应尽量使每个面试组老师平均水平相似，所以建议将文科、理科老师再细分为两个等级。保证每个面试组的两个文科及理科老师中都有 1 个一级的，一个二级的。

二、关于面试的过程要求

1）学生与面试组随机组合

为了保证任意一个学生被各面试组面试的可能性相同，应在面试时采取随机分组的方法，比如计算机对学生随机进行编号，再对面试组随机编号，在案号进行面试。

2）面试时依次提问

在面试时，每位老师依次提问，这样保证了每位老师提问的次数相同，这样每位老师都能等机会的提问到自己关心的问题。

3）每位学生面试最少两数

由于每位学生在面试时状态不同，考虑心理上波动，应增加面试次数，先令每位学生被不同面试组面试两次（两次面试的面试组成员都不相同），两次打分若想差不大，则取平均值，若相差太大，则再找第三个面试组进行面试。

三、关于评分过程的要求

评分时为避免一组内老师之间相互影响，应首先分别打分，再根据老师等级对各老师所打分进行加权求和，等级高的老师所打分数赋的权值大（这样保证了等级高的老师所打分数的权威性），得到的结果即为学生该次面试分数。

最后统计时，若学生两次面试打分差距不大，则取平均值，若相差太大，则再找第三个面试组进行面试，第三次打分与前两次中差距较小的取均值，如若三次打分差距都比较大，则进行第四轮面试，直到有两次结果较接近，该成绩做为最终面试成绩。

四、几点特殊要求

1）学生与其面试组老师不能来自同一个学校

2）学生的面试组老师中不能有该学生的亲属

2）学生的面试组老师在面试之前临时抽取

6 模型的评价与改进

本文中的模型都是建立在矩阵的思想下，构造了表示学生与老师、学生与学生、老师与老师之间关系的三个矩阵，并用据阵中元素间关系将题目中的要求及问题数学模型化，是一种具有实际意义的思路。

在求解过程中，对于本文建立的最优化模型采用 Lingo 编程得到最优解。但随着数据量的加大，计算机计算量会加大，甚至超过现有计算机内存，所以在实际解决问题时，我们又采用 Matlab 软件近似搜索求解。

附表一

第二问分配方案

1~75				76~150				150~225				226~300				301~379			
1	2	3	4	1	3	21	23	2	3	22	23	9	13	21	24	3	7	19	24
1	2	5	6	1	3	22	24	4	5	12	15	9	14	19	23	4	5	9	11
1	2	7	8	2	3	5	9	4	5	18	19	10	14	16	20	4	6	12	21
1	2	9	10	2	4	5	10	4	5	16	20	10	11	15	21	4	9	14	18
1	2	11	12	2	4	6	7	4	5	17	21	10	11	19	22	4	6	16	24
1	2	13	14	2	4	8	9	4	6	9	23	10	11	16	23	4	7	17	22
1	2	15	16	2	4	11	13	5	8	9	13	10	11	18	24	4	13	17	19
1	2	17	18	2	4	12	14	5	8	10	22	11	14	16	21	4	11	18	23
1	2	19	20	2	4	15	17	6	7	9	14	12	16	19	23	5	8	17	24
1	2	21	22	2	4	16	18	6	7	10	11	13	15	19	23	5	8	18	23
1	2	23	24	2	4	19	21	6	7	12	13	1	6	14	24	5	9	19	21
3	4	5	6	2	4	20	22	6	7	15	17	2	9	16	24	6	10	13	19
3	4	7	8	2	5	11	23	6	7	16	18	1	8	17	23	6	10	20	21
3	4	9	10	2	5	12	24	6	7	19	21	3	5	20	23	10	16	18	19
3	4	11	12	4	5	13	23	6	7	20	22	1	7	9	20	3	10	14	24
3	4	13	14	4	5	14	24	6	9	17	24	1	5	10	19	11	17	20	23
3	4	15	16	5	7	9	15	7	9	18	24	1	5	9	12	1	11	19	21
3	4	17	18	5	7	10	16	8	10	11	14	1	7	13	16	12	16	20	22
3	4	19	20	5	7	11	17	8	9	15	20	1	6	10	15	12	15	17	20
3	4	21	22	5	7	12	18	8	9	16	21	1	6	16	21	2	12	18	23
3	4	23	24	5	7	13	19	8	9	17	22	1	6	12	22	3	12	18	24
5	6	7	8	5	7	14	20	8	10	15	18	2	8	10	17	5	13	16	17
5	6	9	10	5	7	21	23	8	10	19	24	2	5	13	15	1	9	14	17
5	6	11	12	5	7	22	24	8	11	15	23	2	7	14	18	2	8	14	23
5	6	13	14	6	8	9	11	11	13	16	19	2	5	18	20	2	9	15	18
5	6	15	16	6	8	10	12	11	13	18	20	2	5	16	22	1	15	18	19
5	6	17	18	6	8	13	15	11	13	21	23	2	7	17	23	4	10	15	22
5	6	19	20	6	8	14	16	12	14	16	18	3	6	9	13	4	16	21	23
5	6	21	22	6	8	17	19	12	13	17	22	3	5	10	11	3	11	17	21
5	6	23	24	6	8	18	20	12	13	19	24	3	5	12	17	5	10	20	24
7	8	9	10	6	8	21	23	12	14	20	21	3	6	14	19	5	11	21	24
7	8	11	12	6	8	22	24	14	15	17	24	3	5	15	21	1	7	10	18
7	8	13	14	9	12	13	16	14	18	21	23	3	5	16	24	1	9	16	22
7	8	15	16	9	11	14	15	15	17	21	23	3	9	18	21	2	9	17	21
7	8	17	18	9	11	16	17	15	20	22	24	3	8	16	22	2	10	19	23
7	8	19	20	9	11	18	19	1	5	16	23	4	6	10	14	2	8	13	22
7	8	21	22	9	11	20	21	1	8	16	24	4	7	10	23	3	8	15	24
7	8	23	24	9	11	22	24	18	19	22	23	4	6	11	20	3	14	17	23
9	10	11	12	9	12	15	23	2	6	20	23	4	7	11	15	4	7	12	24
9	10	13	14	10	11	13	17	1	4	12	18	4	7	16	19	4	14	20	23
9	10	15	16	10	12	14	17	1	5	11	13	4	7	18	21	4	6	15	19
9	10	17	18	10	12	15	19	1	5	14	15	4	13	22	24	5	8	12	16
9	10	19	20	10	12	18	20	1	5	17	20	7	9	22	23	5	11	14	18
9	10	21	22	10	13	18	21	1	4	20	21	7	11	14	24	5	10	15	17
9	10	23	24	10	13	20	22	1	5	18	22	8	12	13	20	5	9	20	22
11	12	13	14	10	12	21	23	2	7	9	12	8	12	14	15	6	9	15	22
11	12	15	16	10	12	22	24	2	5	8	19	8	11	18	22	6	11	14	22
11	12	17	18	13	15	18	24	2	7	10	13	10	16	17	24	6	13	16	20
11	12	19	20	14	15	18	20	2	5	14	21	11	14	17	19	6	12	17	23
11	12	21	22	14	15	19	21	2	6	11	15	12	15	18	21	6	12	18	19
11	12	23	24	14	16	19	22	2	6	12	16	1	12	13	23	6	12	20	24
13	14	15	16	14	15	22	23	2	6	14	17	1	13	17	21	7	11	16	20
13	14	17	18	16	17	20	21	2	6	18	21	1	8	14	22	7	10	14	21
13	14	19	20	16	17	22	23	2	6	19	22	1	11	14	23	7	12	17	21
13	14	21	22	16	18	22	24	2	7	15	24	15	17	19	22	7	12	19	22
13	14	23	24	1	4	17	24	3	5	8	14	2	10	15	20	5	8	20	21
15	16	17	18	1	6	18	23	3	6	7	23	16	18	20	23	3	9	15	19
15	16	19	20	1	7	19	23	3	7	9	16	2	11	19	24	5	9	17	23
15	16	21	22	1	9	19	24	3	7	10	17	2	13	20	24	1	11	15	17
15	16	23	24	1	10	20	23	3	6	11	24	4	15	21	24	4	13	15	20
17	18	19	20	1	11	20	24	3	7	12	20	1	7	12	15	7	13	18	23
17	18	21	22	1	12	21	24	3	7	13	21	1	8	18	21	2	12	13	21
17	18	23	24	1	4	6	13	3	7	15	22	1	8	13	19	1	10	13	24
19	20	21	22	1	4	7	14	3	8	13	18	2	8	11	16	14	18	19	24
19	20	23	24	1	4	9	15	3	8	19	21	2	9	13	23	3	15	18	23

21	22	23	24	1	4	10	16	4	7	9	13	2	7	20	21	16	19	21	24
1	3	5	7	1	4	11	22	4	8	10	21	2	10	14	22	2	11	17	22
1	4	5	8	2	3	6	10	4	8	11	17	3	8	10	20	7	17	20	24
1	3	6	8	2	3	7	11	4	8	12	19	3	11	13	22	1	10	17	22
1	3	9	11	2	3	8	12	4	8	22	23	3	6	12	15	2	10	16	21
1	3	10	12	2	3	13	16	4	8	20	24	3	9	14	20	2	16	17	19
1	3	13	15	2	3	14	15	9	12	14	22	3	6	16	17	2	8	18	24
1	3	14	16	2	3	17	20	9	13	18	22	3	6	18	22	3	11	15	20
1	3	17	19	2	3	18	19	9	12	17	19	3	5	19	22	3	12	16	21
1	3	18	20	2	3	21	24	9	13	17	20	3	10	13	23	4	9	12	20
																4	10	12	13
																4	14	16	17
																4	9	19	22
																5	12	14	19

附表二

问题二、老师---老师，矩阵

66	11	11	10	10	8	8	8	8	9	8	8	9	8	8	8	9	8	8	7	8	8	9	9
11	68	11	10	10	9	9	9	8	9	8	8	9	8	8	9	9	9	8	8	9	8	9	8
11	11	68	11	10	10	10	9	8	8	8	8	8	8	10	8	8	8	8	8	9	8	8	9
10	10	11	67	10	9	10	8	9	8	8	9	9	8	9	8	8	7	8	9	9	8	8	8
10	10	10	10	66	11	10	10	9	8	8	8	7	8	7	8	9	7	8	9	8	7	8	8
8	9	10	9	11	63	10	10	7	8	7	10	7	8	8	8	7	7	8	8	7	8	7	7
8	9	10	10	10	10	64	11	9	8	7	9	8	7	7	7	8	8	7	8	8	7	8	8
8	9	9	8	10	10	11	61	7	9	7	7	7	7	7	7	7	8	7	7	7	9	7	8
8	8	8	9	9	7	9	7	63	11	9	8	9	8	9	7	9	7	8	8	7	10	7	7
9	9	8	8	8	8	8	9	11	64	9	9	9	8	8	8	8	7	8	9	8	8	7	8
8	8	8	8	8	7	7	7	9	9	62	11	8	9	8	7	10	7	7	8	8	8	8	8
8	8	8	9	8	10	9	7	8	9	11	65	9	8	9	8	8	9	9	9	9	7	7	8
9	9	8	9	7	7	8	7	9	9	8	9	61	11	7	7	7	7	8	8	7	7	8	7
8	8	8	8	8	8	7	7	8	8	9	8	11	61	9	8	8	8	8	7	7	7	8	7
8	8	10	9	7	8	7	7	9	8	8	9	7	9	62	11	9	8	8	8	7	7	7	7
8	9	8	8	8	8	7	7	7	8	7	8	7	8	11	61	9	7	8	8	9	8	7	8
9	9	8	8	9	7	8	7	9	8	10	8	7	8	9	9	64	11	8	8	8	8	9	7
8	9	8	7	7	7	8	8	7	7	7	9	7	8	8	7	11	61	9	8	8	7	10	8
8	8	8	8	8	8	7	7	8	8	7	9	8	8	8	8	8	9	62	11	8	9	7	8
7	8	8	9	9	8	8	7	8	9	8	9	8	7	8	8	8	8	11	62	8	7	7	8
8	9	9	9	8	7	8	7	7	8	8	9	7	7	7	9	8	8	8	8	62	11	9	7
8	8	8	8	7	8	7	9	10	8	8	7	7	7	7	8	8	7	9	7	11	61	7	9
9	9	8	8	8	7	8	7	7	7	8	7	8	8	7	7	9	10	7	7	9	7	61	11
9	8	9	8	8	7	8	8	7	8	8	8	7	7	7	8	7	8	8	8	7	9	11	61

附表三

第三问，考虑第二问情况

1~75				76~150				150~225				226~300				301~379			
1	2	13	14	1	11	13	22	1	11	15	24	2	4	19	21	2	8	13	21
1	3	13	15	1	12	14	15	1	12	16	17	2	5	19	22	2	9	13	22
1	4	13	16	1	14	16	24	2	3	16	18	2	6	19	23	2	10	13	24
1	5	13	17	2	3	13	24	2	4	16	19	2	7	19	24	2	11	14	15
1	6	13	18	2	4	14	17	2	5	16	20	2	8	20	21	2	12	14	16
1	7	13	19	2	5	14	18	2	6	16	21	2	9	20	22	3	4	14	17
1	8	13	20	2	6	14	19	2	7	16	22	2	10	20	23	3	5	14	18
1	9	13	21	2	7	14	20	2	8	16	23	2	11	21	22	3	6	14	19
1	10	13	22	2	8	14	21	2	9	16	24	2	12	21	23	3	7	14	20
1	11	13	23	2	9	14	22	2	10	17	19	2	13	22	23	3	8	14	21
1	12	13	24	2	10	14	23	2	11	17	21	2	18	22	24	3	9	14	22
2	3	14	15	2	11	15	16	2	12	17	23	3	4	23	24	3	10	14	23
2	4	14	16	2	12	15	17	3	4	17	24	3	5	13	15	3	11	14	24
2	5	14	17	3	4	15	18	3	5	18	19	3	6	13	16	3	12	15	16
2	6	14	18	3	5	15	19	3	6	18	20	3	7	13	17	4	5	15	17
2	7	14	19	3	6	15	20	3	7	18	21	3	8	13	18	4	6	15	18
2	8	14	20	3	7	15	21	3	8	18	22	3	9	13	19	4	7	15	19
2	9	14	21	3	8	15	22	3	9	18	23	3	10	13	20	4	8	15	20
2	10	14	22	3	9	15	23	3	10	18	24	3	11	13	21	4	9	15	21
2	11	14	23	3	10	15	24	3	11	19	20	3	12	13	24	4	10	15	22
2	12	14	24	3	11	16	17	3	12	19	22	3	14	15	16	4	11	15	23
3	4	15	16	3	12	16	18	4	5	19	23	4	5	14	17	4	12	15	24
3	5	15	17	4	5	16	19	4	6	20	21	4	6	14	18	5	6	16	17
3	6	15	18	4	6	16	20	4	7	20	22	4	7	14	19	5	7	16	18
3	7	15	19	4	7	16	21	4	8	20	23	4	8	14	20	5	8	16	19
3	8	15	20	4	8	16	22	4	9	20	24	4	9	14	21	5	9	16	20
3	9	15	21	4	9	16	23	4	10	21	22	4	10	14	22	5	10	16	21
3	10	15	22	4	10	17	18	4	11	21	23	4	11	14	23	5	11	16	22

3	11	15	23	4	11	17	19	4	12	21	24	4	12	14	24	5	12	17	18
3	12	15	24	4	12	17	20	4	13	22	23	4	13	15	17	6	7	17	19
4	5	16	17	4	17	21	24	4	14	22	24	5	6	15	18	6	8	17	20
4	6	16	18	5	6	17	22	5	6	23	24	5	7	15	19	6	9	17	21
4	7	16	19	5	7	17	23	5	7	13	14	5	8	15	20	6	10	17	22
4	8	16	20	5	8	18	19	5	8	13	15	5	9	15	21	6	11	17	23
4	9	16	21	5	9	18	20	5	9	13	16	5	10	15	22	6	12	17	24
4	10	16	22	5	10	18	21	5	10	13	18	5	11	15	23	7	8	18	19
4	11	16	23	5	11	18	22	5	11	13	19	5	12	15	24	7	9	18	20
4	12	16	24	5	12	18	23	5	12	13	20	6	7	16	17	7	10	18	21
5	6	17	18	5	19	20	24	5	13	21	24	6	8	16	18	7	11	18	22
5	7	17	19	6	7	18	24	6	7	14	15	6	9	16	19	7	12	18	23
5	8	17	20	6	8	19	21	6	8	14	16	6	10	16	21	8	9	18	24
5	9	17	21	6	9	19	22	6	9	14	17	6	11	16	22	8	10	19	20
5	10	17	22	6	10	19	23	6	10	14	18	6	12	16	23	8	11	19	21
5	11	17	23	6	11	20	21	6	11	14	20	7	8	16	24	8	12	19	22
5	12	17	24	6	12	20	22	6	12	14	21	7	9	17	18	9	10	19	23
6	7	18	19	7	8	20	23	6	13	14	23	7	10	17	19	9	11	19	24
6	8	18	20	7	9	21	22	7	8	15	16	7	11	17	20	9	12	20	21
6	9	18	21	7	10	21	23	7	9	15	17	7	12	17	21	10	11	20	22
6	10	18	22	7	11	22	23	7	10	15	18	8	9	17	22	10	12	20	23
6	11	18	23	7	12	22	24	7	11	15	19	8	10	17	23	11	12	20	24
6	12	18	24	8	9	23	24	7	12	15	20	8	11	17	24	1	2	21	22
7	8	19	20	8	10	13	14	8	9	15	21	8	12	18	19	1	3	21	23
7	9	19	21	8	11	13	15	8	10	15	22	9	10	18	20	1	4	21	24
7	10	19	22	8	12	13	16	8	11	15	23	9	11	18	21	1	5	22	23
7	11	19	23	8	13	17	18	8	12	15	24	9	12	18	23	1	6	22	24
7	12	19	24	9	10	13	19	8	16	17	18	10	11	19	20	1	7	23	24
8	9	20	21	9	11	13	20	9	10	16	19	10	12	19	21	1	8	13	14
8	10	20	22	9	12	13	21	9	11	16	20	11	12	19	22	1	9	13	15
8	11	20	23	9	13	17	22	9	12	16	21	1	2	19	23	1	10	13	16
8	12	20	24	10	11	13	23	10	11	16	22	1	3	19	24	1	11	13	17
9	10	21	22	10	12	13	24	10	12	16	23	1	4	20	21	1	12	13	18
9	11	21	23	10	14	15	16	10	16	20	24	1	5	20	22	2	3	13	19
9	12	21	24	10	14	17	20	11	12	17	19	1	6	20	23	2	4	13	20
10	11	22	23	11	12	14	18	1	2	17	20	1	7	20	24	2	5	13	21
10	12	22	24	11	14	19	24	1	3	17	21	1	8	21	22	2	6	13	22
11	12	23	24	12	14	19	21	1	4	17	22	1	9	21	23	2	7	13	23
1	2	13	15	1	2	14	22	1	5	17	23	1	10	21	24	2	8	13	24
1	3	13	14	1	3	14	23	1	6	17	24	1	11	22	23	2	9	14	15
1	4	13	17	1	4	15	17	1	7	18	19	1	12	22	24	2	10	14	16
1	5	13	16	1	5	15	18	1	8	18	20	1	16	23	24	2	11	14	17
1	6	13	19	1	6	15	19	1	9	18	21	2	3	13	14	2	12	14	18
1	7	13	18	1	7	15	20	1	10	18	22	2	4	13	16	3	4	14	19
1	8	13	21	1	8	15	21	1	11	18	23	2	5	13	18	3	5	14	20
1	9	13	20	1	9	15	22	1	12	18	24	2	6	13	19	3	6	14	21
1	10	13	23	1	10	15	23	2	3	19	20	2	7	13	20	3	7	14	22
																3	8	14	23
																3	9	14	24
																3	10	15	16
																3	11	15	17

附表四

问题三、老师---老师，矩阵

68	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	26	7	12	6	10	10	6	9	12	13	14	13
6	68	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	18	26	6	12	8	6	12	10	11	12	10	7
6	6	66	6	6	6	6	6	6	6	6	5	13	19	23	8	7	12	11	8	8	6	8	10
6	6	6	62	5	5	5	5	5	5	5	5	6	13	12	18	14	5	9	11	12	9	9	10
6	6	6	5	60	5	5	5	5	5	5	5	12	6	13	11	18	15	11	9	6	8	8	5
6	6	6	5	5	59	5	5	5	5	5	5	6	12	6	12	12	18	12	10	9	8	8	6
6	6	6	5	5	5	58	5	5	5	5	5	6	7	11	7	10	13	20	11	8	8	8	7
6	6	6	5	5	5	5	60	5	5	5	5	11	8	12	10	7	11	9	20	11	8	8	7
6	6	6	5	5	5	5	5	59	5	5	5	10	7	9	9	7	10	8	11	23	10	8	7
6	6	6	5	5	5	5	5	5	61	5	5	10	9	9	11	7	10	10	10	9	20	13	7
6	6	6	5	5	5	5	5	5	5	59	5	8	8	10	7	11	6	11	10	8	12	21	7
6	6	5	5	5	5	5	5	5	5	5	58	7	8	8	9	9	11	8	8	10	7	9	23
26	18	13	6	12	6	6	11	10	10	8	7	70	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
7	26	19	13	6	12	7	8	7	9	8	8	7	69	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
12	6	23	12	13	6	11	12	9	9	10	8	7	7	67	7	7	6	6	6	6	6	6	6
6	12	8	18	11	12	7	10	9	11	7	9	7	7	7	63	6	6	6	6	6	6	6	6
10	8	7	14	18	12	10	7	7	7	11	9	7	7	7	6	63	6	6	6	6	6	6	6
10	6	12	5	15	18	13	11	10	10	6	11	7	7	6	6	6	65	6	6	6	6	6	6
6	12	11	9	11	12	20	9	8	10	11	8	7	7	6	6	6	6	65	6	6	6	6	6
9	10	8	11	9	10	11	20	11	10	10	8	7	7	6	6	6	6	6	65	6	6	6	6
12	11	8	12	6	9	8	11	23	9	8	10	7	7	6	6	6	6	6	6	65	6	6	6
13	12	6	9	8	8	8	8	10	20	12	7	7	7	6	6	6	6	6	6	6	63	6	6

14	10	8	9	8	8	8	8	8	13	21	9	7	7	6	6	6	6	6	6	6	6	64	6
13	7	10	10	5	6	7	7	7	7	7	23	7	7	6	6	6	6	6	6	6	6	6	59